Die Idee einer Metalogik:

Carnaps Weg vom Logizismus zur *Logischen Syntax*

Abhandlung

zur Erlangung der Doktorwürde

der Philosophischen Fakultät

der

Universität Zürich

vorgelegt von

Adrian Frey

Angenommen im Herbstsemester 2012 auf Antrag von

Prof. Dr. Peter Schulthess

Prof. Dr. Hans-Johann Glock

Zürich, 2018

Danksagung

Ich danke Peter Schulthess für seine Unterstützung meines Dissertationsprojekts. Zudem danke ich ihm dafür, dass er mit seinen Vorlesungen mein Interesse an formaler Logik und an der Geschichte der analytischen Philosophie geweckt hat.

Mein Dank geht auch an André Carus und Steve Awodey, die mir ihre Transkriptionen verschiedener wichtiger stenographischer Dokumente aus Carnaps Nachlass zur Verfügung gestellt haben.

Diese Untersuchung hat profitiert von wertvollen Kritiken anonymer Gutachter der Zeitschriften *Grazer Philosophische Studien* und *Logical Analysis and History of Philosophy*. Zudem hat sie erheblich profitiert von der Auseinandersetzung mit Warren Goldfarbs Arbeiten zur Geschichte der analytischen Philosophie.

Mein grösster Dank gilt Susanne Huber und Tom Ricketts. Nicht nur haben Susanne und Tom frühere Versionen dieser Untersuchung in entscheidenden Punkten kritisiert, die Diskussionen mit ihnen erlaubte es mir allererst zu verstehen, welch fundamentale Bedeutung Wittgensteins *Tractatus* für Carnaps Philosophie hatte.

Die Arbeit an dieser Untersuchung wurde unterstützt durch den Forschungskredit der Universität Zürich und durch den Schweizerischen Nationalfonds (Stipendium für angehende Forschende).

Inhaltsverzeichnis

Du sagst: „ ..., also ist P wahr und unbeweisbar.“ Das heisst wohl: „Also P“. Von mir aus – aber zu welchem Zweck schreibst du diese ‚Behauptung‘ hin? (Das ist, als hätte jemand aus gewissen Prinzipien über Naturformen und Baustil abgeleitet, auf den Mount Everest, wo niemand wohnen kann, gehöre ein Schlösschen im Barockstile.) Und wie könntest du mir die Wahrheit der Behauptung plausibel machen, da du sie ja zu nichts weiter brauchen kannst als zu jenen Kunststückchen? (Wittgenstein, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, S. 122)

1 Einleitung

Rudolf Carnap (1891–1970) ist eine Schlüsselfigur in der Geschichte der analytischen Philosophie. Er war der wichtigste Vertreter des logischen Empirismus und damit des philosophischen Programms, das die Wissenschaftstheorie in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts prägte. Allerdings formulierte W. V. Quine bereits 1951 in seinem Aufsatz *Two Dogmas of Empiricism* eine einflussreiche Kritik an der für Carnaps Denken zentralen Unterscheidung zwischen analytischen Wahrheiten, die wahr sind auf Grund sprachlicher Konventionen, und synthetischen Wahrheiten, die wahr sind auf Grund der Tatsachen. 1962 publizierte Thomas Kuhn zudem sein Werk *The Structure of Scientific Revolutions*, mit dem er die Wissenschaftstheorie revolutionierte und in dem er zu zeigen versuchte, dass wissenschaftshistorische Untersuchungen die von den logischen Empiristen vertretene Auffassung von Wissenschaft als grundsätzlich verfehlt erweisen. Auf Grund dieser Kritiken galt Carnaps Philosophie und der logische Empirismus insgesamt bereits in den 1970er Jahren als ein gescheitertes Programm, das nur mehr noch für denjenigen von Bedeutung ist, dessen Interesse an Philosophie rein historischer Natur ist.

In den letzten zwanzig Jahren begann die analytische Philosophie damit, sich für ihre eigenen Ursprünge zu interessieren, und es erstaunt nicht, dass Carnaps philosophische Ansätze bald wieder diskutiert wurden. Jedoch widmeten sich nun historisch interessierte Philosophen dem logischen Empirismus, die nicht ihre eigene Antwort auf eine systematische Frage als die überzeugende Alternative zu anderen Antworten präsentieren wollten.[1] Und es

[1] Zu den Pionieren in dieser philosophiegeschichtlichen Auseinandersetzung gehören insbesondere A. Coffa, R. Creath, M. Friedman, W. Goldfarb, R. Haller, A. Richardson, T. Ricketts, F. Stadler und T. Uebel.

ist wohl auf diese Tatsache zurückzuführen, dass bald nachgewiesen war, dass die von Kuhn und Quine formulierten Argumente eine Position widerlegten, die nur als ein Zerrbild der Positionen gelten kann, die Carnap tatsächlich vertreten hat: Kuhn und Quine behaupteten beide, dass die logischen Empiristen eine naive Form eines empiristischen Fundamentalismus vertraten. Sie rechneten den logischen Empirismus zu einer erkenntnistheoretischen Tradition, die nach Gewissheit strebt und die alle wissenschaftliche Erkenntnis durch Rückführung auf unbezweifelbare Wahrnehmungsprotokolle rechtfertigen will (Kuhn, 1962, Kap. 9; Quine, 1995, Kap. 1). Gerade weil Kuhn voraussetzte, dass die logischen Empiristen eine philosophische Letztbegründung der wissenschaftlichen Erkenntnis zu erbringen versuchten, konnte er geltend machen, dass die Existenz wissenschaftlicher Revolutionen ihre Auffassung widerlegt. Allerdings reagierte Carnap keineswegs mit Entsetzen auf Kuhns Buch. Am 28. April 1960 schrieb er an Kuhn:

> ... you emphasize that the development of theories is not directed toward the perfect true theory, but is a process of improvement of an instrument. In my own work on inductive logic in recent years I have come to a similar idea: that my work and that of a few friends in the step for step solution of problems should not be regarded as leading to „the ideal system", but rather as a step for step improvement of an instrument. Before I read your manuscript I would not have put it in just those words. But your formulations and clarifications by examples ... helped me to see clearer what I had in mind. (Reisch, 1991, S. 267)

Dieses Zitat deutet bereits darauf hin, dass Carnap nicht, wie von Kuhn und Quine behauptet, versuchte, die wissenschaftlichen Theorien aus unbezweifelbaren Beobachtungssätzen abzuleiten. Und tatsächlich galt den logischen Empiristen die Philosophie nicht als diejenige Disziplin, in der die wissenschaftlichen Theorien auf eine unbezweifelbare Grundlage zurückzuführen sind. Vielmehr waren sie davon überzeugt, dass die empirischen Wissenschaften grundlegender sind als die Philosophie (Friedman, 1999, S. 2–4). Sie erkannten die Aufgabe der Philosophie in der logischen Analyse wissenschaftlicher Theorien. Da ihnen die tatsächlich in den empirischen Wissenschaften gewonnenen Erkenntnisse als paradigmatische Beispiele für begründetes Wissen galten, verfolgten sie mit der logischen Analyse nicht das Ziel einer philosophischen Fundierung dieser Erkenntnisse. Stattdessen wollten sie einen Beitrag leisten, um das von der gesamten Wissenschaft verfolgte Ziel der Einheitswissenschaft zu realisieren (Carnap et al., 1979, S. 90).

Die gegenwärtig stattfindende philosophiegeschichtliche Auseinandersetzung mit dem logischen Empirismus ist aber keineswegs lediglich eine Kritik an dem von Kuhn und Quine gezeichneten Bild. In erster Linie zielt sie darauf ab zu verstehen, vor welchen Hintergründen und in welchem Kontext Carnap und seine Mitstreiter ihre Positionen entwickelten. Die folgende Untersuchung leistet einen Beitrag zu dieser Neubewertung des logischen Empirismus.

Allerdings hat diese Untersuchung nicht die von den logischen Empiristen vertretenen Auffassungen der empirischen Wissenschaft zu ihrem Gegenstand, vielmehr soll in ihr eine Darstellung von Carnaps Philosophie der Logik und der Mathematik gegeben werden. Da Carnap vor 1930 keinen ernsthaften Versuch unternahm, eine Position in der Philosophie der Logik und der Mathematik detailliert zu begründen, und da er in seiner *Logischen Syntax der Sprache* von 1934 im Wesentlichen die Auffassung der Mathematik erreicht hatte, die sich auch in seinem späteren Werk findet (Ricketts, 2007, S. 220–225), diskutiere ich hauptsächlich die Entwicklung, die ihn von seiner Position von 1930 zu der Auffassung führte, die er 1934 vertrat. Im Zentrum steht die Frage, welche Einflüsse, welche Schwierigkeiten und welche Einsichten Carnap zu der Position führten, die sich in der *Logischen Syntax* findet. Ich werde die These vertreten, dass er seine *Logische Syntax* in einem Spannungsfeld entwickelte zwischen Thesen über die Natur der Sprache, der Logik und der Mathematik, die er aus Ludwig Wittgensteins *Tractatus logico-philosophicus* übernahm, und technischen Resultaten, mit denen ihn Alfred Tarski und insbesondere Kurt Gödel konfrontierten.

Wie bereits erwähnt, vertrat Carnap einen logischen Empirismus und die von Gottlob Frege und Bertrand Russell entwickelte moderne Logik spielte denn auch eine herausragende Rolle in seiner Philosophie. Im Vorwort zu seinem *Logischen Aufbau der Welt*, der 1928 erschienen ist, bemerkte er:

> Die Mathematiker haben in den letzten Jahrzehnten eine *neue Logik* aufgebaut. Sie sind durch die Not, durch die Grundlagenkrisis der Mathematik dazu gezwungen worden, da die alte Logik in dieser Krisis vollständig versagte. ... Es ist historisch verständlich, daß die *neue Logik* zunächst nur im engeren Fachkreis der Mathematiker und Logiker Beachtung gefunden hat. Ihre hervorragende *Bedeutung für die gesamte Philosophie* wird nur von wenigen geahnt; ihre Auswertung auf diesem weiteren Felde hat kaum erst begonnen. Wenn die Philosophie willens ist, den Weg der Wissenschaft (im strengen Sinne) zu betreten, so wird sie auf dieses durchgreifend wirksame Mittel zur Klärung der Begriffe und zur Säuberung der Problemsituationen

> nicht verzichten können. (Carnap, 1928, Vorw.)

Sechs Jahre später erkannte Carnap in der modernen Logik nicht mehr lediglich ein „Mittel zur Klärung der Begriffe und zur Säuberung der Problemsituationen“. In der *Logischen Syntax* galt ihm Philosophie überhaupt als angewandte Logik:

> Was an der Arbeit des Philosophen wissenschaftlich haltbar ist, besteht – soweit es nicht empirische Fragen betrifft, die der Realwissenschaft zuzuweisen sind – in logischer Analyse. Die logische Syntax will nun ein Begriffsgebäude, eine Sprache liefern, mit deren Hilfe die Ergebnisse logischer Analyse exakt formulierbar sind. *Philosophie wird durch Wissenschaftslogik*, d. h. logische Analyse der Begriffe und Sätze der Wissenschaft *ersetzt*; *Wissenschaftslogik ist nichts anderes als logische Syntax der Wissenschaftssprache*. (Carnap, 1934a, S. III–IV)

Obwohl die moderne Logik für Carnaps philosophisches Denken und insbesondere für seine Konzeption von Philosophie entscheidend war, suggeriert seine intellektuelle Autobiographie (Carnap, 1963a), dass seine Philosophie der Logik und der Mathematik im Wesentlichen in einer simplen Kombination zweier Thesen bestand: der von Frege und Russell entwickelten logizistischen These, dass sich die gesamte Mathematik auf die reine Logik zurückführen lässt, und der Wittgensteinschen These, dass alle logischen Wahrheiten Tautologien sind, die nichts über die Tatsachen besagen.

Genauer zeichnet Carnap in seiner Autobiographie das folgende Bild. Zunächst betont er, dass er schon während seiner Studienzeit von Frege beeinflusst wurde:

> The men who had the strongest effect on my philosophical thinking were Frege and Russell. I was influenced by Frege first through his lectures and later, perhaps even to a greater extent, through his works, most of which I read only after the war. His main work, *Die Grundgesetze der Arithmetik*, I studied in 1920. … From his analysis I gained the conviction that knowledge in mathematics is *analytic in the general sense* that it has essentially the same nature as knowledge in logic. (Carnap, 1963a, S. 12, Hervorhebung von mir)

Dann führt er aus, dass er die Fregesche Konzeption unter dem Einfluss von Wittgensteins *Tractatus* in entscheidender Weise verschärfte:

> The most important insight I gained from his [Wittgenstein's] work was the conception that the truth of logical statements is based only on their logical structure and on the meaning of the terms. Logical statements are true under all conceivable circumstances; thus their truth is independent of the contingent facts of the world. On the other hand, it follows that these statements do not say anything about the world and thus have no factual content. (ibid., S. 25)

Werden die Fregesche und die Wittgensteinsche These kombiniert, so ergibt sich die folgende Auffassung der Mathematik:

> ... to the members of the Circle there did not seem to be a fundamental difference between elementary logic and higher logic, including mathematics. Thus we arrived at the conception that all valid statements of mathematics are *analytic in the specific sense* that they hold in all possible cases and therefore do not have any factual content. (ibid., S. 47, Hervorhebung von mir)

Diese Auffassung sei für die Philosophie des Wiener Kreises von grundsätzlicher Bedeutung gewesen:

> What was important in this conception from our point of view was the fact that it became possible for the first time to combine the basic tenet of empiricism with a satisfactory explanation of the nature of logic and mathematics. Previously, philosophers had only seen two alternative positions: either a non-empiricist conception, according to which knowledge in mathematics is based on pure intuition or pure reason, or the view held, e.g., by John Stuart Mill, that the theorems of logic and of mathematics are just as much of an empirical nature as knowledge about observed events, a view which, although it preserved empiricism, was certainly unsatisfactory. (ibid.)

Zwar sah sich diese Auffassung der Logik und der Mathematik noch mit einigen Schwierigkeiten konfrontiert:

> We discussed repeatedly and in great detail the difficulties involved in the construction of mathematics on the basis of logic. We did not see any difficulty concerning the definitions of mathematical concepts on the basis of logical concepts.

> But the purely logical character of some of the axioms used in the system of *Principia Mathematica* seemed problematic, namely, that of the axiom of reducibility, the axiom of infinity, and the axiom of choice. We were gratified to learn from the studies on the foundation of mathematics made by F. P. Ramsey that the so-called ramified theory of types used in the *Principia* is unnecessary, that a simple system of types is sufficient, and that therefore the axiom of reducibility can be dispensed with. With respect to the other two axioms we realized that either a way of interpreting them as analytic must be found or, if they are interpreted as non-analytic, they cannot be regarded as principles of mathematics. (ibid.)

Mit der *Logischen Syntax* waren dann aber auch diese verbleibenden Schwierigkeiten gelöst:

> Later I came to the conviction that the axiom of choice is analytic, if we accept that concept of class which is used in classical mathematics in contrast to a narrower constructivist concept. Furthermore, I found several possible interpretations for the axiom of infinity ... of such a kind that they make this axiom analytic. (ibid., S. 47–48)

Bekanntlich hat Quine geltend gemacht, dass Carnaps logischer Empirismus eine Synthese eines Machschen Empirismus mit einem Frege-Russellschen Logizismus ist (Quine, 1951, S. 36–38). Setzt man diese These voraus und berücksichtigt allein die eben auszugsweise wiedergegebene Darstellung der Autobiographie, so kann man zu der Überzeugung gelangen, dass sich die Entwicklung von Carnaps Philosophie der Logik und der Mathematik wie folgt beschreiben lässt.

Sowohl die Grundlagen der Logik als auch das Projekt eines logizistischen Aufbaus der Mathematik spielten von allem Anfang an eine zentrale Rolle in Carnaps Philosophie. Insbesondere gelangte Carnap bereits während seiner Studienzeit unter dem Einfluss von Frege zu der Einsicht, dass die logizistische Kernthese der Rückführbarkeit der Mathematik auf die Logik deshalb entscheidend ist, weil sie es erlaubt, die Natur der mathematischen Wahrheit zu klären. Ausserdem gelangte er unter dem Einfluss von Frege zu der Überzeugung, dass eine Auffassung, der die mathematischen Sätze als empirische Verallgemeinerungen gelten, inakzeptabel ist. Allerdings war Carnap Empirist und also davon überzeugt, dass die Sinneswahrnehmung die einzige Quelle faktischen Wissens ist. Aus diesem Grund konnte er Freges Auffassung nicht akzeptieren, dass die logischen

Wahrheiten vollständig allgemeine Wahrheiten sind, die ebenso deskriptiv sind wie die Gesetze der empirischen Wissenschaften. Er brauchte eine alternative Konzeption von logischer Wahrheit und Wittgensteins *Tractatus* war für ihn aus dem Grund entscheidend, weil dieses Werk eine solche Alternative artikulierte: Wittgenstein setzte die logischen Wahrheiten mit gehaltleeren Tautologien gleich und lieferte damit die Basis für eine empiristische Theorie der mathematischen Wahrheit. Zunächst sah Carnap jedoch nicht, wie alle in der logizistischen Reduktion benötigten Axiome als tautologisch erwiesen werden können. In seiner *Logische Syntax* gelang es ihm aber, einen umfassenderen Begriff der Tautologie zu definieren als derjenige, den Wittgenstein präsentiert hatte. Ausgehend von diesem Begriff war er imstande, alle benötigten Axiome als tautologisch zu erweisen und seine logizistische Theorie der Natur der mathematischen Wahrheit dadurch umfassend zu begründen.

Wie ich in den folgenden Kapiteln nachweisen werde, ist eine solche Darstellung jedoch viel zu simpel. Die Entwicklung, die Carnap zu der in der *Logischen Syntax* vertretenen Auffassung der Logik und der Mathematik führte, ist verschlungen und von einer Vielzahl von Brüchen, von gescheiterten Versuchen und bald wieder verworfenen Ansätzen gekennzeichnet. Tatsächlich muss denn auch die Darstellung, die Carnap selbst in seiner intellektuellen Autobiographie gibt, als vereinfacht und zugespitzt gelten. Doch dies kann auch kaum erstaunen. Denn in dem Teil seiner Autobiographie, der eine Darstellung seiner philosophischen Überzeugungen liefern soll, verfolgte er in erster Linie das Ziel, eine knappe und allgemeinverständliche Darstellung derjenigen Ideen zu geben, die im Zentrum der Diskussionen standen, die die Mitglieder des Wiener Kreises in der zweiten Hälfte der 1920er Jahren und in den frühen 1930er Jahren führten.

Insbesondere vermag die eben skizzierte Darstellung in zwei Zusammenhängen nicht zu überzeugen: Erstens wird sie der Tatsache nicht gerecht, dass sowohl Carnaps Verhältnis zu dem von Frege und Russell verfolgten logizistischen Programm als auch der Einfluss von Wittgensteins *Tractatus* auf sein Denken vielschichtig und komplex waren. Zweitens berücksichtigt sie nicht, dass in der Entwicklung von Carnaps Philosophie der Logik und der Mathematik zwei weitere Logiker eine herausragende Rolle spielten, Gödel und Tarski.

Allerdings enthält jene Darstellung durchaus richtige Elemente. 1930 wollte Carnap die logizistische These der Rückführbarkeit der Mathematik auf die Logik tatsächlich mit Wittgensteins *Tractatus* kombinieren, um so nachzuweisen, dass die mathematischen Wahrheiten blosse Tautologien sind. Insbesondere sein Aufsatz *Die Mathematik als Zweig der Logik* (Carnap, 1930c) ist ein Versuch, dieses Programm zu realisieren. Zudem ist es richtig, dass sich Carnap schon früh explizit zum Logizismus bekannte. So behauptete er etwa bereits in seinem ersten Buch *Der Raum*, das 1922 erschienen ist, dass sich die Mathematik auf die Logik zurückführen lässt (Carnap, 1922a, S. 62).

Jedoch war diese Idee einer Synthese von *Tractatus* und *Principia Mathematica* nie ein solch erfolgversprechender Ansatz, wie Carnap später in seiner Autobiographie geltend machte. Er sah sich bei seinem Versuch, diese Synthese zu realisieren, von vornherein mit gravierenden Schwierigkeiten konfrontiert. Bereits Ende 1930 verwarf er dieses Projekt denn auch, und zwar endgültig. Anfang 1931 führte er eine Unterscheidung von Logik und Metalogik ein, begann damit die Arithmetik metalogisch aufzufassen und entwickelte die ersten Ansätze zu dem syntaktischen Programm, das er dann 1934 in seiner *Logischen Syntax* präsentierte. Und der Versuch, eine Konzeption von Metalogik oder Syntax zu artikulieren, führte dazu, dass er sich schliesslich umfassend von seiner Position von 1930 distanziert hatte: Die Position, die er in seiner *Logischen Syntax* vertrat, unterscheidet sich drastisch von derjenigen, die er in *Die Mathematik als Zweig der Logik* vertreten hatte. Sie basiert auf einer pluralistischen Sprachauffassung und einer syntaktischen Konzeption von Sprachen als Kalkülen und in ihrem Zentrum steht der Versuch, die Diskussion über die Grundlagen der Logik und der Mathematik in eine Untersuchung der Vorzüge und Nachteile syntaktisch spezifizierter Sprachformen zu transformieren.

Tatsächlich spielte die Idee, dass ein logizistischer Aufbau der Mathematik ein Kernelement einer Theorie der mathematischen Wahrheit bildet, sowie auch das Projekt einer logizistischen Reduktion der Mathematik keine herausragende Rolle in Carnaps Philosophie. Auch im Rahmen der Projekte, die er in den 1920er Jahren verfolgte, stützte er keine seiner zentralen Thesen auf die Möglichkeit einer solchen logizistischen Reduktion. Zudem unternahm er in diesen Jahren keinen ernsthaften Versuch, die Möglichkeit dieser Reduktion nachzuweisen, um dadurch die Natur der mathematischen Wahrheit zu klären.

Dennoch stellt Carnap in seiner Autobiographie den Frege-Russellschen Logizismus zu Recht als einen entscheidenden Einfluss dar. Die von Frege und Russell vertretene Konzeption prägte seine frühe Philosophie der Logik und der Mathematik entscheidend, allerdings nicht aus dem Grund, weil sie es ihm ermöglichte, eine Theorie der mathematischen Wahrheit zu formulieren, sondern aus den folgenden zwei Gründen: Erstens übernahm Carnap in allen seinen philosophischen Hauptprojekten, die er vor 1931 verfolgte, die für Freges und Russells Logizismus zentrale Idee, dass ein hierarchisches System von Aussagefunktionen die logische Struktur der idealen Wissenschaftssprache bildet.[2] Zweitens

[2] Zwar findet sich in Freges Werk noch keine allgemeine Charakterisierung einer Hierarchie von Begriffen. Eine solche lieferte erst Russell mit seiner Typentheorie. Dennoch finden sich in Freges Unterscheidung zwischen Begriffen verschiedener Stufen deutliche Ansätze zu einer typentheoretischen Konzeption (Ricketts, 2010a, S. 174–175).

überzeugten ihn diese Logizisten davon, dass es möglich ist, eine präzise Erklärung des Zusammenhanges zwischen Mathematik und empirischer Wissenschaft zu geben.[3]

Tatsächlich war der Einfluss von Frege und Russell gerade aus diesem zweiten Grund entscheidend für Carnaps Denken: Ihm galt nicht die Frage nach der Natur der mathematischen Wahrheit als die grundlegende philosophische Frage, die sich im Zusammenhang mit der Mathematik stellt. Das grundlegende Problem erblickte er vielmehr während seiner gesamten intellektuellen Karriere darin zu klären, welcher Zusammenhang zwischen den Naturwissenschaften einerseits und der Logik und der Mathematik andererseits besteht. Da es Frege und Russell waren, die ihn davon überzeugten, dass dieses Grundproblem gelöst werden kann, indem ein umfassendes formales Sprachsystem aufgebaut wird, das die empirischen und die formalen Wissenschaften vereint, ist also eine der Ideen, die seine gesamte Philosophie prägte, auf den Einfluss dieser Logizisten zurückzuführen.

Meines Erachtens war zudem auch der Einfluss von Wittgensteins *Tractatus* in diesem Zusammenhang entscheidend für Carnaps philosophische Entwicklung. Auch der *Tractatus* war für ihn nicht in erster Linie aus dem Grund wichtig, weil er die Möglichkeit einer Theorie der mathematischen Wahrheit eröffnete, die im Einklang mit empiristischen Überzeugungen ist. Vielmehr gelangte Carnap auf Grund von Wittgensteins Einfluss zu der Einsicht, die im Zentrum seiner Philosophie der Logik und der Mathematik ab 1930 stand: die Einsicht, dass die Logik und die Mathematik im Rahmen der Gesamtwissenschaft reine Hilfsmittel zur Transformation von empirischen Sätzen sind.

In seiner Autobiographie betont Carnap also durchaus zu Recht, dass der Logizismus von Frege und Russell sowie Wittgensteins *Tractatus* grossen Einfluss auf seine Philosophie hatten. Doch im Zusammenhang mit der Entwicklung, die ihn von seiner logizistischen Position von 1930 zu der Position der *Logischen Syntax* führte, spielte von diesen drei Philosophen einzig noch Wittgenstein eine Rolle, wenn auch eine entscheidende. Am Anfang dieser Entwicklung stand nämlich die im Januar 1931 entwickelte Idee, dass erstens zwischen Logik und Metalogik zu unterscheiden ist und dass es diese Unterscheidung zweitens erlaubt, ausgehend von Wittgensteins wahrheitsfunktionaler Konzeption von Sprache und Logik eine vollständig präzise Bestimmung der logischen Struktur einer idealen Wissenschaftssprache zu geben. Am Anfang dieser Entwicklung stand also das Programm, eine Unterscheidung zwischen Logik und Metalogik zu verwenden, um aus dem *Tractatus* eine metalogische Theorie der Logik und der Sprache zu extrahieren.

---

[3] Ich behaupte keineswegs, dass Frege und Russell Carnap nur in diesen beiden Hinsichten beeinflussten. Insbesondere spielte die Auseinandersetzung mit Russells erkenntnistheoretischen Schriften eine wichtige Rolle im Zusammenhang mit dem Projekt, das zum *Logischen Aufbau* führte (Carus, 2007, Kap. 5). Ich behaupte lediglich, dass der Logizismus von Frege und Russell in erster Linie aus diesen zwei Gründen für Carnaps Philosophie der Logik und der Mathematik wichtig war.

Es war aber nicht Wittgenstein allein, dessen Einfluss diese Entwicklung prägte. Es ist insbesondere auf den Einfluss von Gödel und Tarski zurückzuführen, dass es Carnap gelang, das ambitionierte und technische Programm der *Logischen Syntax* zu entwickeln: Es war Tarski, der ihn 1930 davon überzeugte, dass zwischen Logik und Metalogik zu unterscheiden ist und dass die Metalogik dabei als eine Theorie zu verstehen ist, die Sätze zu ihrem Gegenstand hat. Es war Gödel, der mit seinem Unvollständigkeitssatz Carnaps logizistische Position von 1930 zum Einsturz brachte. Es war Gödel, der Carnap dazu brachte, eine genuine Unterscheidung von Objektsprache und Metasprache zu akzeptieren. Und es ist vermutlich auch dem Einfluss Gödels zuzuschreiben, dass Carnap im Herbst 1932 sein Toleranzprinzip in der Logik akzeptierte, dem gemäss über den Aufbau einer Sprachform frei verfügt werden kann.

Die vorhergehenden Abschnitte sollten deutlich gemacht haben, dass die von Carnap in der *Logischen Syntax* vertretene Position in der Philosophie der Logik und der Mathematik keineswegs das einfache Resultat des Versuchs war, eine Wittgensteinsche Auffassung von logischer Wahrheit mit logizistischen Ideen zu kombinieren. Wie die folgende Untersuchung im Detail zeigen wird, war diese Position vielmehr das Resultat eines komplexen Prozesses, in dem zwar auch logizistische Ideen eine Rolle spielten, der aber in erster Linie vom Bemühen geprägt war, Ideen, mit denen Gödel und Tarski die moderne Logik revolutionierten, mit Wittgensteinschen Einsichten in die Natur der Sprache, der Logik und der Mathematik zu kombinieren.

Die folgende Untersuchung ist so strukturiert: Gegenstand des Kapitels 2 ist Carnaps Versuch von 1930, das logizistische Programm mit Wittgensteinschen Ideen zu kombinieren. Im Zentrum des Kapitels steht die These, dass diese Synthese von *Principia Mathematica* und *Tractatus* von vornherein mit gravierenden Schwierigkeiten konfrontiert war und dass Carnap insbesondere, damit er alle mathematischen Wahrheiten als Tautologien hätte erweisen können, einen umfassenderen Begriff der Tautologie benötigt hätte als denjenigen, den er 1930 in Anlehnung an den *Tractatus* unter Verwendung von Wahrheitstafeln einführte. Dieses Kapitel 2 ist eine erweiterte und überarbeitete Version meines Aufsatzes *Die Verteidigung des Logizismus: Carnaps Versuch von 1930*, der in der Zeitschrift *Logical Analysis and History of Philosophy* erschienen ist (Frey, 2012).

Im Kapitel 3 diskutiere ich, wie Carnap zwischen 1931 und 1933 in einer Reihe von Schritten eine Konzeption von Metalogik oder Syntax entwickelte, die es ihm erlaubte, die Diskussion logischer Fragen als eine Untersuchung formaler Eigenschaften von Zeichenreihen zu verstehen. Ich weise nach, dass sein ursprüngliches metalogisches Programm ein Versuch war, eine metalogische Theorie mit einer Wittgensteinschen

Konzeption von Sprache und Logik zu kombinieren. Zudem zeige ich auf, wie Carnap im Herbst 1932 mit der Akzeptanz des Toleranzprinzips seine Konzeption von Syntax in entscheidender Weise erweiterte und zu der Auffassung gelangte, die sich in der *Logischen Syntax* findet.

In Kapitel 4 untersuche ich, wie Carnap ausgehend von seiner logizistischen Position von 1930 zu der Auffassung der Mathematik gelangte, die er 1934 in seiner *Logischen Syntax* vertrat. Dabei zeige ich auf, in welchem Umfang er sich im Laufe dieser Entwicklung von Thesen distanzierte, die sein philosophisches Werk vor dem Schritt zu einem metalogischen Programm prägten. Insbesondere versuche ich die Frage zu beantworten, weshalb Carnap Anfang 1931 sein logizistisches Programm in der Philosophie der Mathematik verwarf und sich der Idee zuwandte, dass die Arithmetik metalogisch als einen Kalkül von Quasiformeln zu konstruieren ist.

In Kapitel 5 diskutiere ich, wie Carnap in seiner *Logischen Syntax* versuchte, die Diskussionen über die Grundlagen der Logik und der Mathematik in eine Untersuchung der Vorzüge und Nachteile syntaktisch spezifizierter Kalküle zu transformieren. Der Schwerpunkt liegt auf der Frage, ob es im Rahmen der *Logischen Syntax* überhaupt noch möglich ist, eine philosophisch signifikante Position zu definieren, die es verdient, als eine genuin logizistische bezeichnet zu werden. Dieses Kapitel 5 basiert auf meinem Aufsatz *Logicism and Carnap's Logical Syntax*, der in der Zeitschrift *Grazer Philosophische Studien* erschienen ist (Frey, 2011).

In Kapitel 6 werde ich schliesslich ausgehend von den Resultaten, die in den vorhergehenden Kapiteln erarbeitet wurden, eine zusammenfassende Antwort auf die Frage geben, welche Rolle Gödel, Wittgenstein und der von Frege und Russell begründete Logizismus in der Entwicklung von Carnaps Philosophie der Logik und der Mathematik spielten.

Wie bereits erwähnt, wurde Carnaps logischer Empirismus in den letzten Jahren rege diskutiert. Daher existieren inzwischen auch eine Reihe wichtiger Untersuchungen, die diesem Thema gewidmet sind (Awodey & Klein, 2004; Carus, 2007; Coffa, 1991; Friedman, 1999; 2000; Friedman & Creath, 2007; Haller, 1993; Richardson, 1998; Stadler, 1997; Uebel, 1992; Wagner, 2009). Auch Carnaps Philosophie der Logik und der Mathematik fand durchaus Beachtung (Awodey & Carus, 2004; 2007; 2009; Friedman, 1988; 1997; 2001; Goldfarb 1996; 2009; Goldfarb & Ricketts, 1992; Oberdan, 1993; Reck, 2004; Ricketts, 2004; 2007; Uebel, 2005). Jedoch existiert so gut wie keine Literatur, die diejenige Entwicklung diskutiert, die Carnap von seiner Position von 1930 zur *Logischen Syntax* führte. Zwar hat Goldfarb (2009) bereits eine überzeugende Antwort auf die Frage gegeben, weshalb Carnap im Herbst 1932 den Schritt zu seinem Toleranzprinzip machte, doch einzig Awodey und Carus haben den Versuch unternommen, eine detaillierte Darstellung der gesamten Entwicklung zu geben (Awodey & Carus, 2007; Awodey & Carus, 2009; Carus, 2007). Dass diese Entwicklung noch kaum untersucht wurde, liegt vermutlich daran, dass sie sich einzig auf Grund des Materials nachvollziehen lässt, das in Carnaps Nachlass erhalten ist.[4] Dieses Material ist nicht nur grösstenteils unpubliziert, ein beträchtlicher Teil davon ist auch in Stolze-Schrey Kurzschrift verfasst. Zwar wurden inzwischen wichtige Dokumente aus dem Nachlass publiziert (Carnap, 2000; Gödel, 2003; Köhler et al. 2002; Stadler, 1997), jedoch mit Ausnahme von Carnaps Briefwechsel mit Gödel lediglich auf Deutsch. Da ich zeigen werde, dass die Darstellung, die Awodey und Carus geben, verfehlt ist, liefert meines Erachtens die folgende Untersuchung daher die erste historisch adäquate Darstellung der Entwicklung, die Carnap zu seiner *Logischen Syntax der Sprache* führte.

[4] Der Nachlass von Carnap befindet sich zum Teil im Besitz der University of California (Rudolf Carnap Papers (Collection 1029). Department of Special Collections, Charles E. Young Research Library, University of California, Los Angeles), zum Teil im Besitz der University of Pittsburgh (Rudolf Carnap Papers, 1905-1970, ASP.1974.01, Special Collections Department, University of Pittsburgh).

2 Die Verteidigung des Logizismus: Carnaps Versuch von 1930

Der Formalismus und der Intuitionismus galten 1930 im deutschsprachigen Raum als die vielversprechendsten Ansätze, um die sogenannte Grundlagenkrise in der Mathematik zu überwinden. Die von Frege und Russell begründete logizistische Position, der die Mathematik als Zweig der Logik gilt, führte hingegen ein Schattendasein (Carnap, 1930c, S. 298). Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt, war Carnap jedoch bereits in den frühen 1920er Jahren unter dem Einfluss von Frege zu der Überzeugung gelangt, dass sich die Mathematik auf die Logik zurückführen lässt. Zwar wandte er sich erst gegen Ende der 1920er Jahren den philosophischen Fragen zu, die sich im Zusammenhang mit den Grundlagen der Logik und der Mathematik ergeben. Es erstaunt aber dennoch nicht, dass er sich dann gerade dem Projekt zuwandte, den Logizismus zu verteidigen. Insbesondere im Jahr 1930 versuchte er den Nachweis zu erbringen, dass das logizistische Programm ein erfolgversprechender Ansatz zu einer Lösung der Grundlagenprobleme der Mathematik darstellt und dass dieses Programm daher nicht ignoriert werden sollte (Carnap, 1930a; 1930c; 1931a).

Einer seiner detailliertesten Versuche, den Logizismus zu verteidigen, präsentierte Carnap an einer Konferenz über die Methodologie der exakten Wissenschaften, die im September 1930 in Königsberg stattfand (Carnap, 1963a, S. 48).[5] Es war dieselbe Konferenz, an der ein breiteres Publikum zum ersten Mal davon erfuhr, dass in der Auseinandersetzung um die Grundlagen der Mathematik ein Wendepunkt erreicht war. Im Anschluss an Vorträge, in denen die verschiedenen Positionen im Grundlagenstreit vorgestellt wurden,[6] entwickelte sich eine Diskussion, in der sich schliesslich ein junger Mathematiker zu Wort meldete und die folgende Bemerkung machte:

> Man kann (unter Voraussetzung der Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik) sogar Beispiele für Sätze ... angeben, die zwar inhaltlich richtig, aber im formalen System der klassischen Mathematik unbeweisbar sind. (Hahn et al., 1931, S. 148)

Dieser Mathematiker war Gödel.[7] Der hiermit angekündigte Beweis seines Unvollständigkeitssatzes führte nicht nur zu einer Zäsur in der Grundlagendiskussion.[8] Dieser

[5] Carnaps Vortrag erschien als (Carnap, 1931a).
[6] Neben Carnap, der den logizistischen Standpunkt verteidigte, stellte Heyting den intuitionistischen Standpunkt vor, von Neumann den formalistischen und Waismann den Wittgensteinschen (Stadler, 1997, S. 389).
[7] Mit der eben zitierten Bemerkung kündigte Gödel zum ersten Mal öffentlich seinen Unvollständigkeitssatz an (Wang, 1987, S. 85–86).
[8] Von Neumann, der noch 1930 ein prominenter Vertreter des Hilbertschen Formalismus war, bemerkte zum Beispiel in einem Brief an Carnap vom 7. 6. 1931, dass er der Überzeugung sei, dass „Gödel die Undurchführbarkeit von Hilberts Programm erwiesen hat“ (Mancosu, 1999, S. 39–40).

Beweis war auch einer der ausschlaggebenden Faktoren für Carnaps radikale Neukonzeption seines philosophischen Projekts, die im Januar 1931 mit dem Schritt zu einem metalogischen Programm ihren Anfang nahm und die ihn schliesslich zu dem Standpunkt führte, den er 1934 in seiner *Logischen Syntax der Sprache* vertrat.

Der Gegenstand dieses Kapitels ist Carnaps Versuch von 1930, logizistische Thesen mit einer Wittgensteinschen Konzeption von logischer Wahrheit zu kombinieren, um so eine umfassende Theorie der Natur der mathematischen Wahrheit zu begründen. Ich diskutiere, wie Carnap versuchte, in Anlehnung an Wittgensteins *Tractatus* den Nachweis zu erbingen, dass alle logischen Wahrheiten gehaltleere Tautologien sind. Zudem zeige ich auf, wie er ausgehend von dem von Russell und Whitehead in den *Principia Mathematica* errichteten System sämtliche mathematischen Wahrheiten als logische Wahrheiten erweisen wollte. Im Zentrum des Kapitels steht die These, dass Carnap sich in seinem Versuch, dieses Programm zu realisieren, schon mit gravierenden Schwierigkeiten konfrontiert sah, ehe er von Gödels Unvollständigkeitsbeweis erfuhr. Wie ich in Kapitel 4.2 im Detail diskutieren werde, war es zwar tatsächlich dieser Beweis, der ihn dazu brachte, dieses logizistische Programm zu verwerfen. Dennoch war seine Idee einer Synthese von *Tractatus* und *Principia Mathematica* nie ein so erfolgversprechender Ansatz, wie er später dann in seiner Autobiographie geltend machte.

Die hauptsächliche Schwierigkeit war die folgende: Carnap war davon überzeugt, dass die Wittgensteinsche Analyse der logischen Wahrheit von entscheidender Bedeutung ist für eine Klärung der Natur der Logik. Allerdings erläuterte er den Begriff der Tautologie unter Verwendung von Wahrheitstafeln und präsentierte also eine Konzeption, gemäss der allem Anschein nach einzig diejenigen Sätze als Tautologien gelten können, die wahr sind auf Grund der Art und der Weise, wie sie mittels aussagenlogischer Verknüpfungen aus einfacheren Sätzen zusammengesetzt sind. Soll eine solche Konzeption eine umfassende Charakterisierung des Begriffs der logischen Wahrheit liefern, so muss daher eine Sprachauffassung vorausgesetzt werden, der alle Sätze als Wahrheitsfunktionen von endlich vielen Elementarsätzen gelten. Allerdings bediente sich Carnap in seinem Versuch, die Mathematik als Zweig der Logik zu erweisen, einer typentheoretischen Sprache, die nicht nur Quantifikationen über Gegenstände und Aussagefunktionen zulässt, sondern auch Quantifikationen, deren Bereich unendlich ist. Daher konnte es ihm nicht gelingen, die These zu verteidigen, dass alle mathematischen Wahrheiten Tautologien sind.[9]

[9] Ich behaupte nicht, dass Wittgenstein im *Tractatus* eine Sprachkonzeption vertrat, gemäss der jeder Satz mittels einer Wahrheitsoperation aus einer endlichen Menge von Elementarsätzen gebildet ist. Tatsächlich kann dafür argumentiert werden, dass Wittgenstein eine Auffassung entwickelte, die auch die Anwendung von Wahrheitsoperationen auf unendliche Mengen von Elementarsätzen gestattet (Hochberg, 1987). Ich behaupte

Im Folgenden diskutiere ich zunächst, wie Carnap 1930 den Begriff der Tautologie definierte. Dann zeige ich auf, welche Ziele er mit seinem logizistischen Programm verfolgte und wie er versuchte, die Mathematik auf die Logik zurückzuführen. Zum Schluss untersuche ich, wie er ausgehend von seiner logizistischen Theorie die Mathematik als ein blosses Hilfsmittel für die Transformation von empirischen Sätzen erweisen wollte.

2.1 Der Begriff der Tautologie

Die von Carnap 1930 bevorzugte Strategie zur Einführung des Begriffs der Tautologie war die folgende:

> Die Wahrheit eines Satzes, der aus einfacheren Sätzen mit Hilfe logischer Verknüpfungen zusammengesetzt ist, wie z. B. „p oder q", „p und q" u. dgl., hängt von der Wahrheit oder Falschheit der in ihm vorkommenden Sätze („Argumente") ab. Für zwei Argumente p und q gibt die folgende Tabelle („Wahrheitswertschema") die vier „Wahrheitsmöglichkeiten" an ... . Nun gibt es Sätze,

p	q	p oder q	P und q	nicht-p oder (p oder q)
W	W	W	W	W
W	F	W	F	W
F	W	W	F	W
F	F	F	F	W

> die derart zusammengesetzt sind, daß sie bei jeder möglichen Verteilung der Wahrheitswerte auf die Argumente wahr sind, wie es die 5. Kolonne für das Beispiel „nicht-p oder (p oder q)" zeigt. Solche Sätze heißen „Tautologien".[10] (Carnap, 1930c, S. 305–306)

Gemäss dieser Erläuterung sind Tautologien Sätze, die in einer solchen Weise aus Teilsätzen zusammengesetzt ist, dass sie bei jeder möglichen Verteilung von Wahrheitswerten auf diese Teilsätze wahr werden. Zwar gab Carnap in seinem *Abriss der Logistik*, einer 1929

lediglich, dass Carnap 1930 ausgehend vom *Tractatus* einen Begriff der Tautologie definierte, dem gemäss einzig diejenigen Sätze Tautologien sind, die wahr sind auf Grund der Art und der Weise, wie sie mittels aussagenlogischer Verknüpfungen aus Teilsätzen zusammengesetzt sind.

[10] Die gleiche Erklärung des Begriffs der Tautologie findet sich in (Carnap, 1930a, S. 22). Im Aufsatz *Die logizistische Grundlegung* (Carnap, 1931a) findet sich keine Definition dieses Begriffes.

publizierten Einführung in die moderne Logik,[11] eine formalere Charakterisierung des Begriffs der Tautologie, doch auch diese basierte im Wesentlichen auf derselben Idee wie die eben angeführte. Im *Abriss* definierte er zunächst den Begriff der Wahrheitsfunktion in der folgenden Weise: Eine n-stellige Funktion F heisst eine Wahrheitsfunktion, wenn sie die folgenden zwei Eigenschaften besitzt: 1.) Die zulässigen Argumente von F und die Werte von F sind Aussagen. 2.) Sind (A_1, ..., A_n) und (B_1, ..., B_n) zwei n-Tupel von Aussagen und gilt für jedes $1 \leq i \leq n$, dass A_i und B_i den gleichen Wahrheitswert haben, so haben auch F(A_1, ..., A_n) und F(B_1, ..., B_n) den gleichen Wahrheitswert (Carnap, 1929, S. 4–5). Ausgehend von dieser Definition charakterisierte er dann die Tautologien als Wahrheitsfunktionen, deren Werte für alle zulässigen Argumente wahre Aussagen sind (ibid., S. 8).

Doch Carnap definierte nicht nur den Begriff der Tautologie in Anlehnung an den *Tractatus*, auch die Thesen, die er auf diese Definition stützte, übernahm er aus Wittgensteins Werk: Er behauptete erstens, dass Tautologien in allen möglichen Fällen gelten und dass sie wahr sind auf Grund ihrer Form allein (Carnap, 1930c, S. 306).[12] Die Wahrheit einer Tautologie hängt also insbesondere nicht vom Wahrheitswert oder vom Sinn ihrer Teilsätze ab. Zweitens sind Tautologien gehaltleer: Sie gelten definitionsgemäss in jedem möglichen Fall und schliessen somit keinen möglichen Fall aus. Da ein Satz aber nur dann einen Gehalt besitzt, wenn er mindestens einen möglichen Fall ausschliesst, besitzen Tautologien keinen Gehalt (Carnap, 1930a, S. 23).[13] Drittens sind alle gültigen Sätze der Logik Tautologien (Carnap, 1930a, S. 22; Wittgenstein, 1921, 6.1). Und deshalb ist viertens alles logische Schliessen in dem Sinne tautologisch, dass der Gehalt der Konklusion eines logisch gültigen Schlusses stets vollständig im Gehalt seiner Prämissen enthalten ist (Carnap, 1930a, S. 25; Wittgenstein, 1921, 5.122).

Doch obwohl Carnap von Wittgenstein die Idee übernahm, dass die Sätze der Logik Tautologien sind, besteht dennoch eine wichtige Differenz zwischen dem *Tractatus* und Carnaps Konzeption: Wittgenstein lieferte im *Tractatus* keine Charakterisierung der logischen Sätze, die unabhängig vom Begriff der Tautologie ist. Er verwarf die Idee, dass sich die logischen Sätze durch ihre Allgemeinheit auszeichnen (6.1231) und er kritisierte Frege dafür, dass ihm der „Grad des Einleuchtens als Kriterium des logischen Satzes" galt (6. 1271). Stattdessen machte er geltend, dass die Sätze der Logik sich darin von allen anderen Sätzen

[11] Im *Abriss* entwickelte Carnap ein System der symbolischen Logik, das zu einem grossen Teil auf demjenigen der *Principia* basiert. Es war gerade das Ziel des *Abrisses*, das System der *Principia* einem breiteren Publikum zugänglich zu machen (Reck, 2004, S. 164).

[12] Im *Tractatus* wird ebenfalls behauptet, dass Tautologien in allen möglichen Fällen gelten (4.46), und zumindest implizit wird behauptet, dass sie allein auf Grund ihrer Form gelten (6.113).

[13] Auch dieses Argument findet sich im *Tractatus*: Daraus, dass eine Tautologie jede mögliche Sachlage zulässt, wird geschlossen, dass sie keine Sachlage darstellt (4.462). Hieraus ergibt sich, dass eine Tautologie keinen Sinn hat (4.031).

unterscheiden, dass sie tautologisch sind (6.113). Ausserdem behauptete er, dass ein Satz dadurch als ein logischer Satz erwiesen wird, dass sein tautologischer Charakter nachgewiesen wird (6.127).

Carnap hingegen versuchte zunächst, ein vom Begriff der Tautologie unabhängiges Kriterium dafür zu formulieren, ob ein Satz ein logischer ist. Dann wollte er ausgehend von diesem Kriterium erstens zeigen, dass alle logischen Sätze Tautologien sind, und zweitens, dass die in der logizistischen Reduktion benötigten Grundsätze logische Sätze sind. Für Carnap hatte daher die These, dass die Sätze der Logik Tautologien sind, den Status einer substantiellen philosophischen These über die Natur einer in einer bestimmten Weise charakterisierten Klasse von Sätzen.

Wie also versuchte Carnap, die logischen Sätze zu charakterisieren? Um 1930 machte er geltend, dass sich diese Sätze auf Grund ihres Vokabulars charakterisieren lassen. Er behauptete also, dass die Sätze der Logik diejenigen Sätze sind, die neben Variablen nur noch logische Konstanten enthalten (Carnap, 2000, S. 93). Damit bediente er sich einer Idee, die bereits von Frege und Russell entwickelt worden war: Auch Frege und Russell galten die Sätze der Logik als vollständig allgemeine Sätze, die neben Variablen nur noch logische Konstanten enthalten (Ricketts, 1996a, S. 59–63).[14] Doch im Unterschied zu Frege und Russell machte Carnap nun eben in Anlehnung an den *Tractatus* zusätzlich geltend, dass die so charakterisierten logischen Sätze sämtliche Tautologien sind.

2.2 Das Projekt eines logizistischen Aufbaus der Mathematik

Wie bereits erwähnt, behauptet der Logizismus, dass sich die Mathematik auf die Logik zurückführen lässt. Genauer charakterisierte Carnap die Position durch die folgenden zwei Thesen: 1.) Die mathematischen Begriffe lassen sich explizit in rein logischen Begriffen definieren.[15] 2.) Die mathematischen Theoreme können aus den logischen Grundsätzen mittels logischer Deduktion abgeleitet werden (Carnap, 1930a, S. 20; 1930c, S. 298; 1931a, S. 91–92). Wird die logizistische Position in dieser Weise charakterisiert, so bestreitet sie also die Existenz von spezifisch mathematischen Grundbegriffen und behauptet, dass sich jeder mathematische Satz in einen Satz übersetzen lässt, der ausschliesslich logische Zeichen

[14] Allerdings besteht in diesem Zusammenhang eine wichtige Differenz zwischen Freges Konzeption und derjenigen von Russell: Frege versuchte keine allgemeine Charakterisierung der logischen Sätze zu geben. Russell hingegen versuchte hinreichende und notwendige Bedingungen dafür anzugeben, ob ein Satz ein logischer Satz ist. Während die vollständige Allgemeinheit Frege also lediglich als eine notwendige Bedingung galt, versuchte Russell ausgehend von der Idee, dass die logischen Sätze vollständig allgemein sind, ein Kriterium für das Logische zu formulieren (Goldfarb, 2010, S. 72).

[15] Carnap verstand 1930 unter einer expliziten Definition eine Festsetzung einer neuen Schreibweise. Er erachtete es daher als charakteristisch für die explizit definierten Zeichen, dass sie sich aus allen Kontexten eliminieren lassen, in denen sie vorkommen können (Carnap, 1931a, S. 95). Demnach zählte er auch die sogenannten Gebrauchsdefinitionen zu den expliziten Definitionen.

enthält. Des Weiteren bestreitet sie die Existenz von spezifisch mathematischen Grundsätzen und Schlussregeln und macht geltend, dass alle diese Übersetzungen von mathematischen Theoremen aus den Grundsätzen der Logik gemäss den Prinzipien der logischen Deduktion abgeleitet werden können.

Dieses logizistische Programm gilt gemeinhin als ein erkenntnistheoretisches Projekt, das auf eine Letztbegründung unseres mathematischen Wissens abzielt: Der Logizist sei der Überzeugung, dass die ersten Begriffe der Logik auf Grund ihrer Klarheit keiner Definition bedürfen und die in diesen Begriffen formulierten Prinzipien auf Grund ihrer Selbstevidenz keines Beweises. Deshalb sei der Versuch, die Mathematik auf die Logik zurückzuführen, ein Versuch, unser mathematisches Wissen umfassend und endgültig zu rechtfertigen (Glock, 2008, S. 28–30).

Zudem gilt dieses logizistische Grundlegungsprojekt als vollständig gescheitert: Da die Mathematik durch die Zurückführung auf die logischen Grundprinzipien endgültig gerechtfertigt werden soll, muss die Wahrheit dieser Prinzipien vollständig gewiss sein. Da sich diese logischen Prinzipien nicht mehr aus grundlegenderen Prinzipien ableiten lassen, kann ihre Wahrheit jedoch nur vollständig gewiss sein, wenn sie selbstevident sind. Doch das System der klassischen Mathematik lässt sich nicht aus selbstevidenten Prinzipien allein errichten. Denn um das Auftreten der von Russell entdeckten Paradoxien zu verhindern, muss der Logizist Prinzipien verwenden, die sich einzig dadurch rechtfertigen lassen, dass sie diese Paradoxien verhindern und dennoch den Aufbau der gesamten Mathematik gestatten (Quine, 1963, S. 388).

Ich behaupte keineswegs, dass das Projekt einer logizistischen Reduktion in der Geschichte der Philosophie nie mit diesem Ziel einer Letztbegründung verfolgt wurde. So forderte Frege von den seinem formalen System zugrundeliegenden Axiomen tatsächlich, dass sie selbstevident zu sein haben (Ricketts, 1996a, S. 61). Ausserdem verfolgte er mit seinem logizistischen Projekt offenkundig erkenntnistheoretische Ziele. Er machte geltend, dass „die Einsicht in die Grundlage des ganzen Baus der Arithmetik mangelhaft ist“ (Frege, 1884, S. 4), und er behauptete, dass die Mathematiker nicht wissen, welches die letzten Geltungsgründe der arithmetischen Wahrheiten sind. Zudem entwickelte er sowohl seine Begriffsschrift also auch seine Definitionen des arithmetischen Vokabulars zu dem Zwecke, um diese letzten Geltungsgründe bestimmen zu können: Die Definitionen erlaubten es ihm, die im Rahmen der Arithmetik unbeweisbaren Wahrheiten auf elementarere Wahrheiten zurückzuführen und so auch die Geltungsgründe der arithmetischen Grundwahrheiten zu bestimmen. Die Begriffsschrift hatte die Funktion, die explizite Angabe aller Voraussetzungen zu erzwingen, auf denen die Gültigkeit eines Schlusses beruht (Ricketts, 2004, S. 184–185). Da Frege unter einer Rechtfertigung einer Wahrheit einen logischen

Beweis dieser Wahrheit verstand, der von den Prinzipien ausgeht, die die letzten Geltungsgründe der Wahrheit sind (Goldfarb, 2010, S. 77–78), verfolgte er also mit seinem Logizismus das Ziel, die Arithmetik umfassend zu rechtfertigen.

Wie bereits in Kapitel 1 betont, versuchten jedoch die logischen Empiristen, eine anti-fundamentalistische Konzeption von Philosophie zu entwickeln, und daher ist es schon von vornherein nicht sonderlich plausibel zu behaupten, dass Carnap mit seinem logizistischen Programm versuchte, die Mathematik auf eine unbezweifelbare Grundlage zu stellen. Und tatsächlich verfolgte er 1930 auch kein solch fundamentalistisches Rechtfertigungsprojekt. Es finden sich in den Aufsätzen, die er 1930 und 1931 zur Philosophie der Mathematik publizierte, keine Belege dafür, dass er glaubte, dass die logischen Wahrheiten gegenüber den mathematischen erkenntnismässig primär sind: Er machte nicht geltend, dass die Wahrheit der logischen Wahrheiten gewisser ist als diejenige der mathematischen Theoreme, dass sie selbstevidenter oder unbezweifelbarer sind als jene Theoreme oder dass die logizistische Reduktion allererst aufzeigt, weshalb wir die begründete Überzeugung haben können, dass die mathematischen Axiome wahr sind. Überhaupt bediente er sich nicht einer erkenntnistheoretischen Begrifflichkeit, um den Status der Prinzipien zu charakterisieren, aus denen er die gesamte klassische Mathematik ableiten wollte.

Aber welche Ziele verfolgte Carnap dann mit seinem logizistischen Programm? Meines Erachtens verfolgte er im Wesentlichen die folgenden zwei Ziele: Erstens wollte er das Problem einer logischen Grundlegung der Mathematik lösen. Zweitens wollte er eine Theorie der mathematischen Wahrheit begründen, die diese Wahrheiten als reine Hilfsmittel für die Transformation von empirischen Sätzen erweist.

2.3 Die Aufgabe einer logischen Grundlegung

Was aber ist bei einer logischen Grundlegung der Mathematik überhaupt zu leisten? In seinem Aufsatz *Die Mathematik als Zweig der Logik* beantwortete Carnap diese Frage wie folgt:

> Man kann es als Aufgabe der logischen Grundlegung der Mathematik ansehen, die überkommene Mathematik, die ja auch in der praktischen Anwendung ihre Fruchtbarkeit erwiesen hat, in möglichst weitem Umfange durch eine geeignete Interpretation zu legitimieren. (Carnap, 1930c, S. 309)

In seiner Besprechung von Kaufmanns Buch *Das Unendliche in der Mathematik* betonte Carnap einen zusätzlichen Aspekt:

> Die ... Aufgabe der logischen Grundlegung der Mathematik besteht darin, eine Symbolik aufzustellen, die es einerseits gestattet, unsere bisherige mathematische Erkenntnis auszudrücken, und die andererseits alles logisch Unzulässige durch ihre Syntax ... automatisch ausschaltet. (Carnap, 1930b, Sp. 1678)

Diese beiden Bemerkungen ergeben zusammen die folgende Bestimmung der Aufgabe einer logischen Grundlegung: In einem ersten Schritt ist ein formales System, ein Kalkül zu konstruieren, in dem die gesamte klassische Mathematik formuliert werden kann und dessen syntaktische Regeln unzulässige Begriffsbildungen und Beweisschritte ausschliessen.[16] Diese syntaktischen Regeln sollen also garantieren, dass ein Mathematiker sich bei der Konstruktion seiner Beweise vollständig auf die Manipulation von Zeichenreihen beschränken kann und nicht auf die Bedeutung von Zeichen Bezug nehmen muss. In einem zweiten Schritt ist dann eine Interpretation für diesen mathematischen Formalismus festzulegen. Und das Ziel, das mit dieser Konstruktion erreicht werden soll, besteht darin, die klassische Mathematik in „möglichst weitem Umfange" zu legitimieren.

Ich habe in Kapitel 2.2 betont, dass Carnap mit seinem Logizismus kein fundamentalistisches Rechtfertigungsprojekt verfolgte und dass er also die Mathematik nicht durch eine Rückführung auf eine gewissere oder evidentere Grundlage rechtfertigen wollte. Dennoch verfolgte er offenkundig das Ziel, die klassische Mathematik zu legitimieren. In welcher Weise versuchte er also, die Mathematik zu legitimieren? In der ersten der beiden eben zitierten Bemerkungen machte Carnap geltend, dass die Mathematik durch „eine geeignete Interpretation" zu legitimieren sei. Doch wodurch zeichnet sich eine geeignete Interpretation aus und wie soll mit einer Interpretation eine Legitimation erreicht werden?

Eine Stelle aus einem Brief, den Carnap am 11. Juli 1931 an von Neumann schrieb, liefert den Schlüssel für eine Antwort auf diese Frage. In diesem Brief charakterisierte Carnap nämlich die Position, die er 1930 vertreten hatte, als eine „Verbindung Russellscher und Hilbertscher Gedanken" (Carnap, 1931d). Meines Erachtens übernahm er von Hilbert insbesondere die Idee, dass das mathematische System zunächst als einen rein formalen Kalkül aufgebaut werden kann (Hilbert, 1925, S. 379–383). Zudem übernahm er von Hilbert die Idee, dass dieses Formelsystem anschliessend durch den Nachweis zu legitimieren ist, dass in ihm keine Widersprüche auftreten können (ibid., S. 383). Allerdings verwarf er die Hilbertsche Idee, dass das System der klassischen Mathematik durch einen finitistischen

[16] Diese Regeln sollen es also zum Beispiel unmöglich machen, Ausdrücke der Form ‚$\phi(\phi)$' zu bilden, die zu Russells Paradox führen. Sie sollen auch die Lückenlosigkeit und Stichhaltigkeit logischer Deduktionen garantieren.

Widerspruchsbeweis zu rechtfertigen ist (Neumann, 1931, S. 118–119), und er ersetzte sie durch die Idee, dass dieses System durch eine Interpretation, das heisst durch die Konstruktion eines Modells, als widerspruchsfrei zu erweisen ist. Schliesslich machte er geltend, dass ein logizistischer Aufbau der Mathematik ein solches Modell liefert.[17] Der logizistische Aufbau legitimiert also die klassische Mathematik, und zwar aus dem Grund, weil er ein Modell für das mathematische Formelsystem liefert und dieses System dadurch als widerspruchsfrei erweist.

Carnap war somit 1930 davon überzeugt, dass die Aufgabe der logischen Grundlegung im Wesentlichen dadurch zu lösen ist, dass für ein formalistisches System der Mathematik ein logizistisches Modell konstruiert wird: Lässt sich die Mathematik ausgehend von dem System, das in den *Principia Mathematica* errichtet wurde, auf einer logischen Basis konstruieren, so ist ein Modell für das formalistische System konstruiert und damit ist dieses System legitimiert.

Wenn die eben entwickelte Darstellung korrekt ist, so war Carnap also davon überzeugt, dass die Aufgabe einer logischen Grundlegung gelöst werden kann, ohne dass dabei eine Theorie der Natur der mathematischen Wahrheit entwickelt werden muss. Wie bereits erwähnt, versuchte er aber 1930, eine solche Theorie zu begründen, und es stellt sich daher die Frage, weshalb er glaubte, einer solchen Theorie zu bedürfen. Meines Erachtens formulierte Carnap diese Theorie in erster Linie aus dem folgenden Grund: Er wollte mit ihr die Rolle der Vernunft in den Wissenschaften klären, und zwar durch den Nachweis, dass die logischen und mathematischen Sätze reine Hilfsmittel zur Transformation von empirischen Sätzen sind. Er wollte also nicht nur die Anwendbarkeit der Mathematik in den empirischen Wissenschaften erklären, er wollte zudem auch die empiristische These rechtfertigen, dass die Vernunft keine Quelle von Erkenntnissen ist, sondern einzig ein Vermögen zur Transformation von Sätzen. Daher konnte er sich nicht mit dem Nachweis begnügen, dass das Formelsystem der klassischen Mathematik widerspruchsfrei ist. Vielmehr benötigte er eine substantielle philosophische Theorie der mathematischen Wahrheit.

[17] Daran, dass Carnap davon überzeugt war, dass die logizistische Konstruktion ein Modell für das Formelsystem der klassischen Mathematik liefert, bestehen keine Zweifel. In seinem Aufsatz *Eigentliche und Uneigentliche Begriffe* von 1927 machte er explizit geltend, dass die Folge der Anzahlen, wenn sie in der von Russell vorgeschlagenen Weise definiert wird, ein formales Modell für die Peano-Axiome liefert (Carnap, 1927, S. 361–362). Zudem untersuchte Carnap in der zweiten Hälfte der 1920er Jahren die Grundlagen der axiomatischen Methode. Im Rahmen dieses Projektes versuchte er nicht nur, den Begriff des Modells präzise zu definieren (Carnap, 2000, S. 93–96). Er versuchte auch zu zeigen, dass ein Axiomensystem, das ein Modell besitzt, widerspruchsfrei ist (ibid., S. 96–101). Es ist aus diesen Gründen höchst plausibel zu behaupten, dass Carnap 1930 davon überzeugt war, dass eine logizistische Konstruktion das Formelsystem der klassischen Mathematik als widerspruchsfrei erweist.

2.4 Eine logizistische Theorie der mathematischen Wahrheit

Wie also wollte Carnap ausgehend vom Logizismus eine Theorie der mathematischen Wahrheit begründen? Die Rückführbarkeit der Mathematik auf die Logik zeigt, dass die mathematischen Wahrheiten von derselben Art sind wie die logischen Wahrheiten. Jedoch liefert die Möglichkeit einer solchen Rückführung allein noch keine Theorie der mathematischen Wahrheit. Sie lässt ja die Frage offen, von welcher Art die logisch-mathematischen Wahrheiten sind. Um eine solche Theorie formulieren zu können, brauchte Carnap auch noch eine Antwort auf die Frage, wodurch die logischen Wahrheiten ausgezeichnet sind, und eine solche Antwort glaubte er ausgehend von Wittgensteins *Tractatus* geben zu können: Im *Tractatus* versuchte Wittgenstein zu zeigen, dass die logischen Wahrheiten keine Bilder der Wirklichkeit sind, sondern bereits wahr sind auf Grund der Bedingungen der Möglichkeit sprachlicher Repräsentation (Ricketts, 2007, S. 200–201). Und deshalb glaubte Carnap auf der Grundlage der Wittgensteinschen Konzeption und des logizistischen Programms die These begründen zu können, dass die logischen und die mathematischen Wahrheiten blosse Tautologien sind, die keinen faktischen Gehalt besitzen.[18]

Da sich aus dieser Theorie der mathematischen Wahrheit insbesondere ergibt, dass die mathematischen Theoreme keinen Gehalt besitzen, erlaubte sie es Carnap, eine der zentralen Schwierigkeiten zu lösen, mit denen sein philosophisches Projekt von 1930 konfrontiert war. 1926 hatte er sich dem Wiener Kreis angeschlossen und in der Folge war er zu der Überzeugung gelangt, dass der Empirismus die einzige haltbare Position ist.[19] Er charakterisierte diese Position durch die These, dass es keine synthetischen Urteile a priori gibt (Carnap, 1930a, S. 23),[20] und also durch die These, dass jede inhaltliche Erkenntnis in einem gewissen Sinne auf die Erfahrung zurückgeht. Allerdings scheint eine solche Position, wie die folgende Bemerkung von Hahn deutlich macht, offenkundig unhaltbar zu sein:

> Der Durchführung des empiristischen Standpunktes scheint nun eine sehr einfache Tatsache entgegenzustehen: die Tatsache nämlich, daß es eine Logik und eine

[18] Die von Carnap 1930 vertretene Form des Logizismus ist also in entscheidender Weise verknüpft mit Wittgensteins Analyse der Natur der Logik. Diese Form des Logizismus ist deshalb bereits das Resultat eines entscheidenden Bruchs mit der von Frege und Russell begründeten Tradition (Uebel, 2005, S. 179).

[19] In der ersten Hälfte der 1920er Jahren war Carnap noch keineswegs Empirist. So behauptete er etwa in einem Aufsatz von 1923: „Nachdem lange Zeit hindurch die Frage nach den Quellen der physikalischen Erkenntnis heftig umstritten worden ist, darf heute vielleicht schon gesagt werden, daß der reine Empirismus seine Herrschaft verloren hat. Daß der Aufbau der Physik sich nicht auf die Versuchsergebnisse allein stützen kann, sondern auch nichterfahrungsmäßige Grundsätze verwenden muß, ist ja von der Philosophie schon längst verkündet worden. Doch erst nachdem Vertreter der exakten Wissenschaften die Eigenart der physikalischen Methode zu untersuchen begonnen hatten und dabei zu einer nicht-empiristischen Auffassung gelangt waren, ergaben sich Lösungen, die den Physiker selbst befriedigen konnten" (Carnap, 1923, S. 90).

[20] Dass sich der Empirismus durch die These charakterisieren lässt, dass es keine synthetischen Urteile a priori gibt, war eine verbreitete Ansicht im Wiener Kreis. Zum Beispiel charakterisierte auch Schlick den Empirismus durch diese These (Schlick, 1979, S. 136).

> Mathematik gibt, die uns doch anscheinend absolut sichere und allgemeine Erkenntnisse über die Welt liefern. (Hahn et al., 1931, S. 135)

Gerade weil uns die Erfahrung keine absolut sichere und allgemeine Erkenntnis über die Welt liefern kann, scheint also allein schon die Existenz von Logik und Mathematik den Empirismus zu widerlegen.

Einem Philosophen, der am Empirismus festhalten will, bleiben angesichts dieser Schwierigkeit lediglich zwei Auswege offen: Er kann entweder versuchen zu zeigen, dass die mathematischen Theoreme empirische Verallgemeinerungen sind und deshalb keine absolut sicheren und allgemeinen Erkenntnisse ausdrücken. Oder er kann versuchen, die These zu begründen, dass die mathematischen Theoreme überhaupt keine Erkenntnisse über die Welt ausdrücken (Carnap, 1963a, S. 47). Da Carnap als Schüler von Frege eine Millsche Auffassung der Mathematik nicht akzeptieren konnte, blieb ihm nur der zweite dieser beiden Auswege offen. Deshalb musste er behaupten, dass ein konsistenter Empirismus nur möglich ist, wenn der Nachweis erbracht werden kann, dass die Sätze der Mathematik keine inhaltlichen Erkenntnisse zum Ausdruck bringen. Und genau dieser Nachweis schien ihm mittels der These der tautologischen Natur der mathematischen Wahrheit möglich (Carnap, 1930a, S. 23; 1963a, S. 47). Denn sind die mathematischen Wahrheiten gehaltleere Resultate der repräsentierenden Funktion der Sprache, so ist gezeigt, dass sie, obwohl sie notwendigerweise gelten, dennoch keine Beispiele für synthetische Wahrheiten a priori sind.

Carnaps Versuch, die mathematischen Wahrheiten als gehaltleer zur erweisen, war also zwar ein Bestandteil einer Verteidigung des Empirismus, doch er setzte in ihm keinen empiristischen Bedeutungsbegriff voraus. Er setzte lediglich voraus, dass ein Satz nur dann einen Gehalt hat, wenn durch den Satz mindestens ein möglicher Fall ausgeschlossen wird. Sodann versuchte er zu zeigen, dass die Sätze der Logik als Tautologien und die Sätze der Mathematik als Sätze der Logik gehaltleer sind (Goldfarb, 1996, S. 223). Hätte Carnap einen empiristischen Bedeutungsbegriff vorausgesetzt, so wäre eine Berufung auf den Logizismus auch überflüssig gewesen: Wird vorausgesetzt, dass ein Satz nur dann einen Gehalt hat, wenn es Beobachtungen geben kann, die gegen seine Wahrheit sprechen, so lassen sich die mathematischen Sätze bereits dadurch als gehaltleer erweisen, dass sie mit allen möglichen Beobachtungen in Einklang stehen.[21]

Allerdings setzte Carnap mit gutem Grund keinen empiristischen Bedeutungsbegriff voraus. Denn mit seiner Argumentation versuchte er ja, den Empirismus allererst zu

[21] Es erstaunt deshalb nicht, dass Schlick 1932 unter Voraussetzung eines empiristischen Bedeutungsbegriffs zum Schluss gelangte, dass es für den Nachweis der tautologischen Natur der Mathematik irrelevant ist, ob die Mathematik ein Zweig der Logik ist oder nicht (Goldfarb, 1996, S. 220–223).

rechtfertigen. Hätte er einen solchen Bedeutungsbegriff vorausgesetzt, so wäre seine Argumentation deshalb zirkulär gewesen: Soll die empiristische Position mit dem Nachweis gerechtfertigt werden, dass die mathematischen Wahrheiten Tautologien sind, so können die Tautologien nicht dadurch charakterisiert werden, dass sie mit allen möglichen Beobachtungen in Einklang stehen. Vielmehr müssen sie in einer solchen Weise charakterisiert werden, dass auch ein Kritiker des Empirismus zugestehen muss, dass sie keinen Gehalt besitzen (ibid., S. 222–223).

Carnap war jedoch 1930 nicht davon überzeugt, dass das Ziel einer Rechtfertigung des Empirismus bereits vollständig erreicht war. Wie ich im folgenden Kapitel 2.5 diskutieren werde, war er nämlich der Ansicht, dass das von Russell und Whitehead in den *Principia Mathematica* entwickelte System noch keine vollständige Begründung des Logizismus liefert. Daher sah er sich vor die Aufgabe gestellt zu zeigen, dass die Schwierigkeiten, die das System der *Principia* noch offenlässt, überwunden werden können.

2.5 Die Schwierigkeiten im System der *Principia*

Im Zusammenhang mit der ersten logizistischen Kernthese, gemäss der alle mathematischen Begriffe explizit in logischen Begriffen definiert werden können, sah Carnap keine Schwierigkeiten: Seines Erachtens hatten Russell und Whitehead in den *Principia Mathematica* gezeigt, dass jeder mathematische Satz in einen Satz übersetzt werden kann, der ausschliesslich einige wenige undefinierte Grundzeichen verwendet.[22] Ausserdem hielt er es für offensichtlich, dass die benötigten Grundzeichen rein logische Zeichen sind (Carnap 1930c, 301). Und führt man sich vor Augen, mit welchen Grundzeichen Carnap glaubte auskommen zu können, so erstaunt es auch nicht, dass er zu diesem Verdikt gelangte.[23]

Jedoch wurde Carnaps Ansicht nach mit diesem System noch nicht gezeigt, dass jeder Satz, der eine Übersetzung eines mathematischen Theorems in rein logische Begriffe ist, aus den Grundsätzen der Logik logisch ableitbar ist. Denn zu den Grundsätzen des Systems der *Principia* gehören das Unendlichkeits- und das Auswahlaxiom und der rein logische Charakter dieser beiden Axiome ist zweifelhaft.[24] Zudem zwang die in den *Principia*

[22] Tatsächlich verwies Carnap darauf, dass die Definition der reellen Zahlen Schwierigkeiten bereitet. Doch diese Schwierigkeiten resultieren daraus, dass die Konstruktion der reellen Zahlen in den *Principia* das Reduzibilitätsaxiom voraussetzt, und sie sind deshalb dadurch zu lösen, dass dieses Axiom als unnötig erwiesen wird (Carnap, 1931a, S. 93–94). Wie Carnap versuchte, das Reduzibilitätsaxiom als überflüssig zu erweisen, diskutiere ich in Kapitel 2.5.2.

[23] Die wichtigsten benötigten Grundzeichen sind gemäss Carnap die folgenden: gewisse Junktoren, die Quantoren und das Identitätszeichen (Carnap, 1930a, S. 20–21). Dass Carnap diese Grundzeichen für ausreichend hielt, beruht darauf, dass seine Grundzeichen ihm auch die Formulierung höherstufiger Quantifikationen erlaubten.

[24] Das Auswahlaxiom besagt, dass zu jeder Menge von elementfremden, nichtleeren Mengen eine Auswahlmenge existiert, die mit jeder der Elementmengen genau ein Element gemein hat (Carnap, 1931a, S.

verwendete verzweigte Typentheorie Russell und Whitehead dazu, ein von Carnap als unzulässig eingestuftes Reduzibilitätsaxiom anzunehmen.

Während in der einfachen Typentheorie lediglich die Aussagefunktionen in verschiedene Typen unterteilt werden, und zwar in Abhängigkeit davon, von welchen Arten von Entitäten sie gelten, werden in der verzweigten Typentheorie die Aussagefunktionen eines Typs zusätzlich in Ordnungen unterteilt. Diese zusätzliche Unterteilung in Ordnungen beruht auf der Form der Definitionen, durch die die Aussagefunktionen eingeführt werden (Carnap, 1931a, S. 97). In einer verzweigten Typentheorie sind daher keine Aussagen über alle Entitäten eines bestimmten Typs möglich, vielmehr gelten einzig Aussagen über alle Entitäten einer bestimmten Ordnung eines Typs als legitim.

Allerdings werden in den *Principia* die reellen Zahlen als Attribute von rationalen Zahlen eingeführt und die kleinste obere Schranke einer nichtleeren, nach oben beschränkten Menge E von reellen Zahlen wird mit dem folgenden Attribut Φ von rationalen Zahlen identifiziert:

$$\Phi(x) \equiv (\exists\chi)(\chi(x) \,.\, \chi \in E)$$

Da in dieser Definition über die Elemente von E quantifiziert wird, gehört Φ gemäss der verzweigten Typentheorie nicht zu der gleichen Ordnung wie die Elemente von E. Daher ist keine Aussage über die Elemente von E und Φ zugleich möglich (Ramsey, 1926, S. 213–215). Da jedoch Aussagen, die sich auf die Elemente einer Menge und auf ihr Supremum zugleich beziehen, in der Analysis unverzichtbar sind, sahen sich Russell und Whitehead gezwungen, ihr Reduzibilitätsaxiom einzuführen.[25] Dieses Axiom garantiert, dass es zu jeder Aussagefunktion eines gegebenen Typs eine umfangsgleiche Aussagefunktion gibt, deren Ordnung die niedrigste Ordnung des Typs ist (Carnap, 1931a, S. 97; Whitehead & Russell, 1925, S. 56). Daher ermöglich es dieses Axiom, Definitionen und Aussagen zu formulieren, die sich auf alle reellen Zahlen schlechthin beziehen (Carnap, 1931a, S. 101): Gemäss diesem

95). Carnap formulierte das Unendlichkeitsaxiom als die Behauptung, dass es zu jeder natürlichen Zahl eine grössere gibt (ibid., S. 95). In den *Principia Mathematica* besagt das Axiom, dass es zu jeder natürlichen Zahl n eine Menge mit n verschiedenen Individuen gibt (Whitehead & Russell, 1927, *120.3). Wird die Konstruktion der natürlichen Zahlen der *Principia* vorausgesetzt, so ist Carnaps Formulierung des Axioms äquivalent zu derjenigen der *Principia*. Dieses Axiom postuliert also lediglich die Existenz unendlich vieler Individuen und seine Geltung ist damit verträglich, dass ausschliesslich endliche Mengen existieren. Es besteht somit ein wichtiger Unterschied zwischen dem Unendlichkeitsaxiom der *Principia* und den Axiomen, die in Systemen der Mengenlehre vielfach dieselbe Bezeichnung tragen. So wird etwa das Unendlichkeitsaxiom im Zermelo-Fränkelschen Axiomensystem so formuliert, dass es die Existenz einer induktiven Menge behauptet, also einer Menge, zu der die Zahl 0 gehört und mit einer Zahl stets auch der Nachfolger dieser Zahl. Mit dem Axiom wird in diesem Axiomensystem also die Existenz einer unendlichen Menge postuliert.

[25] Dass die verzweigte Typentheorie ohne das Reduzibilitätsaxiom zu verheerenden Konsequenzen führt, wurde auch von Russell selbst geltend gemacht: „... it is absolutely necessary, if mathematics is to be possible, that we should have some method of making statements which will usually be equivalent to what we have in mind when we (inaccurately) speak of ‚all properties of x'" (Russell, 1908, S. 241). Russell machte jedoch geltend, dass sich aus dieser Schwierigkeit einer der Hauptgründe für die Annahme des Reduzibilitätsaxioms ergibt (ibid., S. 241–243).

Axiom existiert zum Beispiel zu dem eben definierten Attribut Φ ein umfangsgleiches Attribut von rationalen Zahlen, das von derselben Ordnung ist wie die Elemente von E. Somit erlaubt es dieses Axiom, eine Aussage zu machen über alle Elemente von E und über das Supremum von E zugleich.

Da das System der *Principia* also auf einem unzulässigen und auf zwei problematischen Grundsätzen beruht, hat eine Verteidigung des Logizismus die folgenden Aufgaben: Sie muss erstens zeigen, dass das Unendlichkeits- und das Auswahlaxiom als rein logische Grundsätze gedeutet werden können, oder, wenn sich dies nicht als möglich erweisen sollte, so muss sie zeigen, dass auf die Aufstellung dieser Axiome verzichtet werden kann. Zweitens muss sie zeigen, dass auch ohne das Reduzibilitätsaxiom eine widerspruchsfreie Konstruktion des gesamten Systems der klassischen Mathematik möglich ist. Wie Carnap diese Verteidigung des Logizismus 1930 zu erbringen versuchte, ist der Gegenstand der folgenden Kapitel 2.5.1–2.5.2. Ich werde nachweisen, dass Carnaps Verteidigungsversuch scheitert, und zwar aus dem Grund, weil er zumindest hätte aufzeigen müssen, dass das Unendlichkeitsaxiom ein zulässiger Grundsatz in einem logizistischen System ist.

2.5.1 Das Unendlichkeits- und das Auswahlaxiom

Weshalb also ist es problematisch, das Unendlichkeits- und das Auswahlaxiom in einem logizistischen System als Grundsätze aufzustellen? Carnap sah zwei Schwierigkeiten: Erstens machen diese beiden Axiome Existenzaussagen und daher ist es zweifelhaft, ob sie rein logischer Natur sind. Denn allem Anschein nach hat es die Logik nur mit den möglichen Formen zu tun und sie kann keine Aussagen darüber machen, ob etwas existiert oder nicht (Carnap 1931a, S. 95–96). Zweitens ist es fraglich, ob diese Axiome allein auf Grund ihrer Form gelten: So gilt das Unendlichkeitsaxiom bloss für manche Individuenbereiche und für andere nicht. Wenn es überhaupt gilt, so gilt es allem Anschein nach also auf Grund der zufälligen Beschaffenheit der Welt und nicht auf Grund seiner Form. Auch das Auswahlaxiom gilt nicht auf Grund seiner Form, zumindest nicht, wenn es dahingehend verstanden wird, dass es die Konstruierbarkeit der Auswahlklasse behauptet.[26] Denn ob diese Klasse konstruiert werden kann oder nicht, hängt davon ab, welche Aussagefunktionen als gegeben vorausgesetzt werden und welche Prinzipien zur Konstruktion weiterer Aussagefunktionen zugelassen sind (Carnap, 1930c, S. 306).[27]

---

[26] Wie im Folgenden deutlich werden wird, neigte Carnap 1930 zu der Behauptung, dass das Auswahlaxiom so verstanden werden muss, dass es die Konstruierbarkeit der Auswahlklasse behauptet. Deshalb hatte er aus dem eben angeführten Grund Zweifel daran, ob das Axiom allein auf Grund seiner Form gilt und also als tautologisch angesehen werden kann.

[27] In seiner Diskussion der Zulässigkeit des Unendlichkeits- und des Auswahlaxioms nahm Carnap also nicht seine Definition von Tautologizität zum Ausgangspunkt. Vielmehr verwendete er die Gültigkeit auf Grund der

Nun hatte Ramsey 1925 eine Auffassung der Mathematik vorgeschlagen, gemäss der das Auswahlaxiom eine Tautologie wird und das Unendlichkeitsaxiom zumindest kein empirischer Satz (ibid., S. 307). Doch er setzte dabei voraus, dass die Existenz von Eigenschaften unabhängig ist von ihrer Konstruierbarkeit in endlich vielen Schritten, und diese „theologische" Auffassung der Mathematik (Carnap, 1931a, S.102) konnte Carnap nicht akzeptieren:

> Wir rechnen, ebenso wie die Intuitionisten, zu den Eigenschaften nur diejenigen ... , die aus undefinierten Grundeigenschaften des betreffenden Bereiches nach bestimmten Konstruktionsregeln in endlich vielen Schritten konstruiert sind. Der Unterschied liegt aber darin, daß wir nicht nur die von den Intuitionisten angewandten Konstruktionsregeln für gültig ansehen ... , sondern darüber hinaus auch die Verwendung des Ausdruckes „für alle Eigenschaften" ... . (ibid., S. 105)

Carnap war also davon überzeugt, dass Ramseys Auffassung zu verwerfen ist, und zwar deshalb, weil sie auch Eigenschaften zulässt, die nicht aus vorgegebenen Grundeigenschaften gemäss vorgegebenen Konstruktionsregeln konstruiert sind. Ich werde nicht auf die Frage eingehen, ob Carnap Ramsey in diesem Punkt zu Recht kritisierte.[28] Für meine Ausführungen ist einzig entscheidend, dass Carnap also, weil er Ramseys Auffassung verwarf, auch dessen Nachweis des nicht-empirischen Charakters des Unendlichkeits- und des Auswahlaxioms nicht akzeptieren konnte. Allerdings kann auf die Annahme dieser Axiome auch nicht ohne weiteres verzichtet werden, denn ohne diese Axiome lassen sich ja Sätze, die in der klassischen Mathematik akzeptiert werden, nicht beweisen. Hätte Carnap also den Logizismus nicht als gescheitert ansehen müssen, wenn gemäss den ihm zur Verfügung stehenden Kriterien für Tautologizität diese Axiome nicht als tautologisch gelten können?

Dass Carnap den Logizismus nicht als gescheitert ansah, beruht darauf, dass er glaubte, mit der folgenden Strategie auf die Annahme dieser beiden Axiome verzichten zu können: Ist S ein Satz der klassischen Mathematik, dessen Geltung auf einem der beiden problematischen

---

Form als Kriterium dafür, ob ein Satz ein zulässiger logischer Grundsatz ist. Zwar erfüllen alle Tautologien dieses Kriterium, doch Carnaps Diskussion zeigt, dass es ihm dieses Kriterium erlaubte, die Zulässigkeit von Grundsätzen zu untersuchen, die keine Tautologien in dem von ihm definierten Sinne sind.

[28] Carnaps Kritik an Ramsey beruht auf der Forderung, dass nur diejenigen Eigenschaften angenommen werden dürfen, die in einem gewissen Sinne konstruierbar sind. Allerdings unternahm Carnap in seinen Aufsätzen von 1930 und 1931 keinen Versuch, die zulässigen Konstruktionsregeln näher zu bestimmen, und deshalb bleibt seine Forderung unbestimmt. Es ist daher kaum möglich zu beurteilen, inwiefern und inwieweit Carnap sich mit seinem Bekenntnis zu einer konstruktivistischen Forderung von der heutzutage gemeinhin akzeptierten Auffassung entfernte, der die Existenz von Mengen als unabhängig von ihrer Definierbarkeit in irgendeiner Sprache gilt.

Axiome beruht, so wird S als abgekürzte Version eines Konditionals gedeutet, dessen Antecedens das relevante Axiom ist und dessen Konsequens S (ibid., S. 96).[29]

Um diese Strategie zu diskutieren, ist es sinnvoll, die logizistische These, dass die mathematischen Theoreme aus den logischen Grundsätzen rein logisch hergeleitet werden können, in der folgenden Weise in zwei Teilthesen aufzuspalten: 1.) Die Folgerungsregeln, mit denen in der Mathematik Theoreme aus den Axiomen abgeleitet werden, sind restlos solche der reinen Logik. 2.) Jedes mathematische Theorem ist aus den Axiomen der reinen Logik mittels der Folgerungsregeln der Mathematik ableitbar (Dubislav, 1932, S. 38).

In der striktesten Interpretation wird mit 2.) behauptet, dass jedes Theorem der klassischen Mathematik in der Form, in der es dort gemeinhin akzeptiert wird, aus den Grundsätzen der Logik mittels der Folgerungsregeln der Mathematik ableitbar ist. Da in der Mathematik Sätze akzeptiert werden, deren Beweis die Geltung der fraglichen beiden Axiome voraussetzt, ist 2.) unter dieser Interpretation also falsch, wenn sich diese Axiome nicht als rein logische Grundsätze erweisen lassen. Nun kann 2.) aber auch abgeschwächt werden und dies ist das Resultat von Carnaps Vorschlag. Um 2.) als korrekt zu erweisen, erachtete er es als hinreichend, dass aus den logischen Grundsätzen mittels der Folgerungsregeln der Mathematik gewisse Sätze abgeleitet werden können, die in einer bestimmten Beziehung zu den augenscheinlich in der klassischen Mathematik akzeptierten Sätzen stehen.

Dieser Vorschlag ist jedoch höchst problematisch. Denn wenn beim Nachweis, dass die Mathematik ein Zweig der Logik ist, die beiden Axiome in der von Carnap vorgeschlagenen Weise behandelt werden können, so stellt sich die Frage, weshalb nicht auch die anderen mathematischen Axiome so behandelt werden können. Ist 1.) korrekt, so lassen sich alle mathematischen Theoreme rein logisch aus den Axiomen der Logik und der Mathematik herleiten. Stellt man also jedem Theorem die mathematischen Axiome als Bedingungen voran, auf denen seine Geltung beruht, so lassen sich die resultierenden Konditionale rein logisch beweisen. Kann somit die Mathematik auch als Zweig der Logik erwiesen werden, indem ihre Sätze in dieser Weise umgedeutet werden und ohne dass ihre Axiome auf logische Prinzipien zurückgeführt werden?

Meines Erachtens kann diese Methode keine für den Logizisten akzeptable Methode der Rückführung der Mathematik auf die Logik sein, wenn er an der Behauptung festhalten will, dass der Logizismus ein Bestandteil einer substantiellen Bestimmung der Natur der mathematischen Wahrheit ist. Denn lässt sich die Mathematik in dieser Weise auf die Logik zurückführen, so gilt dasselbe auch für jede andere axiomatische Theorie, deren

[29] Carnap übernahm diese Interpretation der beiden Axiome von Russell (Carnap, 1931a, S. 96). Russell diskutierte diese Interpretation zum Beispiel in (Russell, 1919, S. 202–204).

Folgerungsregeln rein logischer Natur sind. Also können mit dieser Methode zum Beispiel auch axiomatische Theorien der Physik als Zweig der Logik erwiesen werden. Deshalb kann die Tatsache, dass sich die Mathematik in dieser Weise auf die Logik zurückführen lässt, keinen Aufschluss geben über die Natur der mathematischen Wahrheit (Quine, 1936, S. 97).

Allerdings wollte Carnap die Mathematik auch nicht in dieser Weise auf die Logik zurückführen. Er wollte seine Strategie der Umdeutung nur bei denjenigen Axiomen anwenden, für die es zweifelhaft ist, ob sie als Tautologien angesehen werden können. Die Strategie bleibt aber dennoch problematisch. Denn es kann argumentiert werden, dass die Unmöglichkeit ihrer Rückführung auf logische Grundsätze diese Axiome als die eigentlichen mathematischen Grundsätze erweist und dass Carnaps Strategie also die Mathematik ihres eigentümlichen Charakters beraubt. So behauptete Dubislav aus diesem Grund, dass die Hinzunahme des Unendlichkeitsaxioms einen Logikkalkül in einen mathematischen Kalkül transformiert (Dubislav, 1932, S. 43). Ob dieses Argument überzeugend ist oder nicht, hängt davon ab, wie zentral die fraglichen Axiome für das System der klassischen Mathematik sind. Beruht ein Grossteil dieses Systems auf ihnen, so kann zu Recht behauptet werden, dass Carnaps Strategie die Mathematik ihres spezifischen Charakters beraubt. Beruhen hingegen nur vereinzelte Theoreme auf diesen Axiomen, so können diese Axiome durchaus als Hypothesen verstanden werden, die den Theoremen stets als Bedingungen voranzustellen sind.

Zumindest beim Auswahlaxiom ist Carnaps Strategie deshalb nicht vollständig unplausibel. Zwar wird dieses Axiom in der klassischen Mathematik nicht nur in der Mengenlehre verwendet, sondern findet zum Beispiel auch in der Algebra Anwendung in der Form des Lemmas von Zorn. Doch zumindest die Arithmetik ist weitestgehend unabhängig von diesem Axiom. Des Weiteren wird das Axiom auch in der mathematischen Praxis vielfach als Hypothese angesehen, auf deren Verwendung in einem Beweis stets explizit hinzuweisen ist.

Beim Unendlichkeitsaxiom ist die Strategie hingegen klarerweise inadäquat. In der von Carnap 1930 angestrebten Konstruktion der Mathematik auf einer logischen Basis werden die reellen Zahlen als kleinste obere Schranken von beschränkten Mengen rationaler Zahlen definiert und eine kleinste obere Schranke mit der Menge aller Brüche identifiziert, die kleiner als die Schranke sind (Carnap, 1931a, S. 93–94). Da die reellen Zahlen dabei mit unendlichen Mengen gleichgesetzt werden müssen, beruht die Adäquatheit dieser Konstruktion auf einem Axiom, das die Existenz unendlicher Mengen garantiert (Quine, 1969, S. 130–131).[30] In den *Principia Mathematica* setzt ausserdem die Peano-Arithmetik ein Unendlichkeitsaxiom voraus: In diesem System wird eine natürliche Zahl n identifiziert mit der Menge aller n-elementigen Mengen erster Stufe. Und deswegen wird ein Axiom benötigt, das garantiert, dass es unendlich viele Individuen gibt und es also zu jeder natürlichen Zahl n eine Menge mit n verschiedenen Individuen gibt. Existieren nämlich für eine natürliche Zahl n keine solche Menge, so gilt dasselbe auch für jede Zahl, die grösser als n ist. Dann aber werden alle Zahlen, die grösser oder gleich n sind, mit der Menge identifiziert, deren einziges Element die leere Menge ist, und dies steht im Widerspruch zu den Peano-Axiomen. Aus diesen folgt ja, dass der Nachfolger einer natürlichen Zahl stets von dieser Zahl verschieden ist (Russell, 1919, S. 131–132).[31]

Da in der von Carnap skizzierten Konstruktion also die gesamte Analysis und die gesamte Arithmetik auf Unendlichkeitsaxiomen beruhen, hätte er zeigen müssen, weshalb die Theoreme selbst, deren Geltung auf diesen Axiomen beruht, als rein logische Sätze verstanden werden können. Seine Strategie vermag also in diesem Zusammenhang nicht zu überzeugen und seine Verteidigung des logizistischen Projekts muss als gescheitert eingestuft werden.

In den von Carnap um 1930 publizierten Schriften findet sich kein Hinweis darauf, dass er seine Strategie zur Behandlung des Unendlichkeits- und des Auswahlaxioms für fragwürdig erachtete. Diese Schriften erwecken vielmehr den Eindruck, dass er zu dieser Zeit keine Möglichkeit sah, wie diese beiden Axiome als zulässige Grundsätze erwiesen werden könnten, und er in seiner Strategie deshalb den einzigen Weg zu einer Rettung des Logizismus erblickte. Allerdings weist Carnap in seiner Autobiographie darauf hin, dass er auch 1930 hoffte, diese Axiome als Tautologien deuten zu können (Carnap, 1963a, S. 47–48). Wenn dem tatsächlich so war, so hatte er zu dieser Zeit zwar die Hoffnung, dass sich diese Axiome mittels einer geeigneten Definition des Begriffs der Tautologie als tautologisch erweisen lassen. Doch er sah auch, dass dies mittels des von ihm 1930 definierten Begriffs nicht möglich ist. Dann war die von ihm vorgeschlagene Behandlung dieser Axiome also als Notbehelf gedacht, der letztlich auf der Grundlage einer Definition eines umfassenderen Begriffs von logischer Wahrheit zu vermeiden ist.

---

[30] Da das Unendlichkeitsaxiom der *Principia* nicht die Existenz unendlicher Mengen garantiert, muss deshalb in der eben skizzierten Konstruktion ein weiteres Axiom angenommen werden, das die Existenz solcher Mengen garantiert und also eine stärkere Behauptung macht als das Unendlichkeitsaxiom der *Principia*.

[31] Die natürlichen Zahlen können so konstruiert werden, dass die Peano-Arithmetik nicht auf dem Unendlichkeitsaxiom der *Principia* beruht. Insbesondere wird eine solche Konstruktion bereits erwähnt in (Russell, 1919, S. 132–134). In Carnaps Aufsätzen von 1930 wird jedoch lediglich die Definition der Kardinalzahlen als Klassen gleichmächtiger Klassen erster Stufe diskutiert und es wird auf die Vorteile dieser Definition verwiesen (Carnap, 1930c, S. 302). Auch im *Abriss der Logistik* werden die Kardinalzahlen in dieser Weise definiert (Carnap, 1929, S. 50–51). Somit erfordert die Peano-Arithmetik, wenn die natürlichen Zahlen in der von Carnap zu dieser Zeit favorisierten Weise definiert werden, das Unendlichkeitsaxiom der *Principia*.

2.5.2 Das Reduzibilitätsaxiom

Während Carnap es lediglich als zweifelhaft erachtete, ob das Unendlichkeits- und das Auswahlaxiom als logische Grundsätze angesehen werden können, hatte er keine Zweifel daran, dass das Reduzibilitätsaxiom unzulässig ist (Carnap, 1930c, S. 306).[32] Deshalb musste er zeigen, dass auf die Aufstellung dieses Axioms verzichtet werden kann. Dieser Nachweis ist aber nicht trivial: Wie bereits erwähnt, ist das Reduzibilitätsaxiom unverzichtbar, wenn die gesamte klassische Mathematik im Rahmen der verzweigten Typentheorie konstruiert werden soll. Daher kann das Reduzibilitätsaxiom nur dann verworfen werden, wenn auch die verzweigte Typentheorie als überflüssig erwiesen werden kann und also gezeigt werden kann, dass die Gründe, die für die Annahme dieser Version der Typentheorie zu sprechen scheinen, nicht stichhaltig sind.

Weshalb also sollte es notwendig sein, die Aussagefunktionen eines bestimmten Typs noch in verschiedene Ordnungen zu unterteilen? Nach Carnap sah sich Russell aus zwei Gründen gezwungen, die verzweigte Typentheorie aufzustellen: Russell glaubte erstens, dieser Theorie zu bedürfen, um die Antinomien ausschalten zu können, und er glaubte zweitens, dass sie sich aus einem logischen Prinzip ergibt, dem sogenannten Teufelskreisprinzip (Carnap, 1931a, S. 98).[33] Soll die verzweigte durch die einfache Typentheorie ersetzt werden, so muss deshalb gezeigt werden, dass diese beiden Gründe nicht stichhaltig sind.

Carnap war davon überzeugt, dass sich der erste der eben angeführten Gründe im Anschluss an Ramsey wie folgt entkräften lässt: Wenn zwischen den logischen und den epistemologischen Antinomien unterschieden wird, dann kann gezeigt werden, dass die logischen Antinomien durch die einfache Typentheorie ausgeschaltet werden und dass lediglich die epistemologischen den Rückgriff auf die verzweigte erfordern. Da es des Weiteren charakteristisch für die epistemologischen Antinomien ist, dass sie solche Begriffe wie Wahrheit und Definierbarkeit voraussetzen, müssen diese Antinomien beim Aufbau der Mathematik überhaupt nicht berücksichtigt werden. Sie können nämlich im logisch-mathematischen System selbst überhaupt nicht ausgedrückt werden, weil die Begriffe, die für die Entstehung dieser Antinomien verantwortlich sind, keine logisch-mathematischen, sondern empirische Begriffe sind (Carnap, 1931a, S. 98–99; Ramsey,1925, S. 183–184).

Da die verzweigte Typentheorie aber ausserdem aus dem Teufelskreisprinzip resultiert, musste Carnap auch dieses Prinzip verwerfen. Da dieses Prinzip gerade das Verbot von

[32] Dies galt 1930 bereits als so selbstverständlich, dass es Carnap nicht mehr für nötig hielt, sich zu der Frage zu äussern, weshalb dieses Axiom nicht als tautologisch gelten kann.

[33] Carnaps Darstellung von Russells Position ist in diesem Zusammenhang nicht völlig korrekt. Nach Russell entstehen die Antinomien dadurch, dass das Teufelskreisprinzip verletzt wird (Whitehead & Russell, 1925, S. 37–38). Die verzweigte Typentheorie wird dann präsentiert als eine Theorie, die diese Antinomien dadurch ausschaltet, dass sie Verletzungen des Teufelkreisprinzips verunmöglicht (ibid., S. 48 –55).

nichtprädikativen Begriffsbildungen ist, musste er also nachweisen, dass nichtprädikative Begriffsbildungen nicht im Allgemeinen unzulässig sind und dass es also zulässig sein kann, ein Gebilde zu definieren unter Bezugnahme auf eine Gesamtheit, zu der auch das Gebilde selbst gehört (Carnap, 1931a, S. 99).[34] Weshalb aber sollte diese Art der Begriffsbildung überhaupt unzulässig sein?

In den *Principia Mathematica* wird die Unzulässigkeit nichtprädikativer Definitionen mit dem folgenden Argument gezeigt: Es ist einer Aussagefunktion wesentlich, dass sie in ambiger Art und Weise alle ihre Werte denotiert. Daher hat eine Aussagefunktion nur dann eine wohldefinierte Bedeutung, wenn alle ihre Werte wohldefiniert sind. Wird eine Aussagefunktion φ durch eine nichtprädikative Definition eingeführt, so wird in der Definition von φ auf eine weitere Aussagefunktion ϕ Bezug genommen, zu deren Werten auch die Aussage $\phi(\varphi)$ gehört. ϕ kann somit keine wohldefinierte Bedeutung haben, wenn nicht φ schon eine solche hat, und deshalb sind nichtprädikative Definitionen zirkulär (Whitehead & Russell, 1925, S. 39).

Gemäss den *Principia* ergibt sich also das Teufelskreisprinzip und damit auch die verzweigte Typentheorie bereits aus der Natur der Aussagefunktionen (Goldfarb, 1989, S. 37). Eine Möglichkeit, nichtprädikative Definitionen als zulässig zu erweisen, besteht deshalb darin, die in den *Principia* vorgeschlagene Bestimmung der Natur dieser Funktionen zu verwerfen. Auch wenn Carnap diese Problematik 1930 nicht ausführlich diskutierte, deuten seine Ausführungen im Aufsatz *Die logizistische Grundlegung* dennoch darauf hin, dass er tatsächlich versuchte, die nichtprädikativen Definitionen in dieser Weise als zulässig zu erweisen.

In diesem Aufsatz diskutierte Carnap den Begriff der induktiven Zahl (Carnap, 1931a., S. 103–104). Um diesen Begriff zu definieren, führte er zunächst den Begriff der erblichen Eigenschaft ein:

$$\mathrm{Erb}(\varphi) = (n)(\varphi(n) \supset \varphi(n+1))$$

Dann definierte er den Begriff der induktiven Zahl wie folgt:

$$\mathrm{Ind}(x) = (\varphi)[(\varphi(0) \,.\, \mathrm{Erb}(\varphi)) \supset \varphi(x)]$$

Gemäss dieser Definition ist eine Zahl also induktiv, wenn ihr jede erbliche Eigenschaft von 0 zukommt. Allerdings ist diese Definition nichtprädikativ. Denn in ihrer Formulierung wird ja über alle Zahleigenschaften quantifiziert und damit insbesondere auch über die Eigenschaft, eine induktive Zahl zu sein (ibid., S. 100).

[34] Genauer lassen sich die nichtprädikativen Begriffsbildungen wie folgt definieren: Eine Spezifikation ist nichtprädikativ, wenn sie einen Quantor enthält, zu dessen Gegenstandsbereich auch die spezifizierte Entität gehört (Goldfarb, 1989, S. 24).

Wie also glaubte Carnap, diese Definition als zulässig erweisen zu können? Er argumentierte wie folgt: Obwohl diese Definition nichtprädikativ ist, kann bei einer gegebenen induktiven Zahl gezeigt werden, dass sie induktiv ist. Im Satz ‚Ind(2)' wird zwar eine Aussage über beliebige Eigenschaften gemacht, doch beim Beweis dieser Aussage muss nicht für jede erbliche Eigenschaft von 0 einzeln nachgewiesen werden, dass sie auf 2 zutrifft. Vielmehr kann die Eigenschaft φ dabei unbestimmt gelassen werden. Beim Beweis von ‚Ind(2)' wird ja lediglich aus der Voraussetzung, dass φ eine erbliche Eigenschaft von 0 ist, und aus den relevanten Definitionen logisch abgeleitet, dass φ auf 2 zutrifft. Der Nachweis, dass eine solche logische oder mathematische Allaussage wie ‚Ind(2)' gilt, wird also nicht dadurch erbracht, dass die Einzelfälle durchlaufen werden, sondern dadurch, dass aus gewissen Bestimmungen gewisse andere logisch hergeleitet werden (ibid., S. 104).

Gemäss Carnap ist somit zwischen zwei Arten der Allgemeinheit zu unterscheiden: zwischen der numerischen Allgemeinheit, die sich auf vorgegebene Gegenstände bezieht, und der spezifischen, für die dies nicht gilt (ibid., S. 103). Eine Allaussage, in der eine numerische Allgemeinheit ausgedrückt wird, bezieht sich auf einen vorgegebenen Gegenstandsbereich und sagt von den einzelnen Elementen dieses Bereichs etwas aus. Drückt hingegen eine Aussage eine spezifische Allgemeinheit aus, so bezieht sie sich nicht auf die Elemente eines vorgegebenen Gegenstandsbereichs. Vielmehr behauptet sie das Bestehen einer Beziehung zwischen gegebenen Bestimmungen. Im Satz ‚Ind(2)' wird etwa eine Beziehung behauptet zwischen der Bestimmung, eine erbliche Eigenschaft von 0 zu sein, und der Bestimmung, eine auf 2 zutreffende Eigenschaft zu sein. Während beim Nachweis einer numerischen Allgemeinheit die Einzelfälle durchlaufen werden müssen, ist deshalb beim Nachweis einer spezifischen Allgemeinheit zu zeigen, dass die durch die Aussage in Beziehung gesetzten Bestimmungen in der relevanten Weise logisch voneinander abhängig sind.

Obwohl Carnap diese Deutung logisch-mathematischer Allaussagen 1930 nicht im Detail und mit der nötigen Genauigkeit entwickelte, ist dennoch deutlich, dass er in seinem Rechtfertigungsversuch der nichtprädikativen Definitionen letztlich die in den *Principia* formulierte Bestimmung der Natur der Aussagefunktionen und das sich daraus ergebende Verständnis der Allaussagen verwarf: Gemäss der in den *Principia* gegebenen Bestimmung denotiert eine Aussagefunktion in ambiger Weise alle ihre Werte und daher ist der Allquantor, mit dem ja eine Aussage über eine Aussagefunktion gemacht wird, gerade ein Mittel, um alle Instanzen einer Aussagefunktion auf einen Schlag zu behaupten (Whitehead & Russell, 1925, S. 41)

Allerdings ist Carnaps Deutung der logisch-mathematischen Allaussagen wohl kaum zu vereinbaren mit seinem Wittgensteinschen Begriff der Tautologie: So sollen sich diese

Allaussagen nicht auf vorgegebene Gegenstände beziehen. Die Tautologien sollen sich aber dadurch auszeichnen, dass sie unter allen möglichen Umständen wahr sind. Doch wie sollen sich die möglichen Umstände charakterisieren lassen, wenn nicht vorausgesetzt wird, dass ein Bereich vorgegebener Gegenstände bestimmt ist (Goldfarb, 1996, S. 224)?

2.6 Die hauptsächlichen Schwierigkeiten

Ich habe soweit diejenigen Probleme diskutiert, von denen Carnap glaubte, dass sie gelöst werden müssen, wenn die mathematischen Theoreme als Tautologien erwiesen werden sollen. Die erste hauptsächliche Schwierigkeit ergab sich für ihn daraus, dass er die verzweigte Typentheorie als überflüssig zu erweisen hatte. Diese Schwierigkeit versuchte er mit dem Nachweis zu lösen, dass nichtprädikative Begriffsbildungen nicht im Allgemeinen unzulässig sind. Diesen Nachweis wiederum versuchte er auf der Grundlage einer bestimmten Analyse der logisch-mathematischen Allaussagen zu erbringen. Dass die einfache Typentheorie selbst anzuerkennen ist, daran bestand für Carnap zu dieser Zeit nicht der geringste Zweifel. Insbesondere war er davon überzeugt, dass sich die Einteilung in Typen und die Sinnlosigkeit der Typenvermengungen sozusagen von selbst ergibt beim Aufbau des Begriffssystems der empirischen Wissenschaften (Carnap, 1930c, S. 308). Die einfache Typentheorie galt ihm also nicht nur deshalb als gerechtfertigt, weil sie die logischen Antinomien verhindert, sondern auch deshalb, weil sie gleichsam in der Natur des wissenschaftlichen Begriffssystems begründet ist.

Die zweite Hauptschwierigkeit erblickte Carnap darin zu bestimmen, welcher Status dem Unendlichkeits- und dem Auswahlaxiom im Rahmen des logizistischen Programms zukommt. Diese Schwierigkeit versuchte er dadurch zu lösen, dass er die mathematischen Theoreme, deren Geltung auf diesen beiden Axiomen beruht, umdeutete, um so die Annahme dieser beiden Axiome als unnötig zu erweisen. Wie ich gezeigt habe, ist diese Strategie jedoch nicht zu vereinbaren mit dem Ziel, eine Theorie der mathematischen Wahrheit zu formulieren. Um seine logizistische Theorie zu retten, hätte Carnap eine Definition der logischen Wahrheit benötigt, gemäss der zumindest das Unendlichkeitsaxiom als ein zulässiger Grundsatz in einem logizistischen System gelten kann.

Allerdings scheiterte Carnaps Projekt, eine logizistische Theorie der mathematischen Wahrheit zu begründen, nicht nur deshalb, weil er das Unendlichkeitsaxiom nicht als eine Tautologie erweisen konnte. Gemäss dem von ihm 1930 definierten Begriff der Tautologie konnten auch andere Grundsätze, die in einem logizistischen Aufbau der Mathematik unverzichtbar sind, nicht als tautologisch gelten: Er erläuterte den Begriff der Tautologie in Anlehnung an den *Tractatus* mittels Wahrheitstafeln. Soll die Mathematik als Zweig der

Logik erwiesen werden, so können jedoch zu den logischen Grundsätzen nicht nur Grundsätze der Aussagenlogik gezählt werden. Es müssen auch Grundsätze angenommen werden, von denen nicht behauptet werden kann, dass sie auf Grund der Art und der Weise gelten, wie sie mittels logischer Verknüpfungen aus Teilsätzen zusammengesetzt sind.

So bemerkte Carnap etwa im Aufsatz *Die logizistische Grundlegung*: „Das erforderliche System der Grundsätze der Logik ergibt sich durch Vereinfachung des Russellschen Systems; es enthält vier Grundsätze der Satzlogik und zwei der Funktionslogik“ (Carnap, 1931a, S. 95). Carnap war sich also durchaus der Tatsache bewusst, dass er neben solchen Grundsätzen wie ‚$p \vee p \supset p$‘, die mittels Wahrheitstafeln als Tautologien erwiesen werden können, auch solche Grundsätze wie etwa ‚$(x)\ \varphi(x) \supset \varphi(u)$‘ oder ‚$(x)(p \vee \varphi(x)) \supset p \vee (x)\ \varphi(x)$‘ benötigte.[35] Zudem war er sich auch der Tatsache bewusst, dass in mathematischen Allaussagen vielfach über einen unendlichen Bereich von Gegenständen oder Aussagefunktionen quantifiziert wird (Carnap, 1931a, S. 103). In der Theorie der reellen Zahlen muss ja sogar über Bereiche quantifiziert werden, die überabzählbar sind.

Es ist offensichtlich, dass Carnaps Projekt einer logizistischen Theorie der mathematischen Wahrheit daher von vornherein zum Scheitern verurteilt war: Wenn der von ihm definierte Begriff der Tautologie eine umfassende Charakterisierung des Begriffs der logischen Wahrheit liefern soll, so muss eine strikt finitistische Sprachauffassung akzeptiert werden, der jeder Satz als eine Wahrheitsfunktion von endlich vielen Elementarsätzen gilt.[36] Doch im Rahmen einer solchen Sprache lässt sich keine Reduktion der Mathematik auf die Logik formulieren. Carnap bedient sich daher bei seinem Versuch, das logizistische Projekt zu realisieren, auch einer Sprache, die auf der einfachen Typentheorie beruht und die es gestattet, über unendliche Bereiche von Gegenständen oder Aussagefunktionen zu quantifizieren. Somit liefert der Begriff der Tautologie, den Carnap 1930 definierte, keinen adäquaten Begriff der logischen Wahrheit für diejenige Sprache, der er sich bedienen wollte, um die Mathematik als Zweig der Logik zu erweisen.

Nun hatte Ramsey bereits 1925 eine Erweiterung des Begriffs der Wahrheitsfunktion auf Funktionen mit unendlich vielen Argumenten vorgeschlagen (Ramsey, 1925, S. 168–172). Dieser Vorschlag hätte es Carnap erlaubt, einen umfassenderen Begriff der Tautologie zu definieren, gemäss dem zumindest auch logische Wahrheiten, in denen über einen

[35] Es lässt sich nicht eindeutig entscheiden, welches System von Grundsätzen Carnap in der eben zitierten Bemerkung vor Augen hatte. Es ist allerdings höchst plausibel zu vermuten, dass er das System vor Augen hatte, das zum Beispiel Gödel in seinem Vollständigkeitsbeweis verwendete (Gödel, 1930). Dieses System beruht ja auch auf vier Grundsätzen der Satzlogik und auf zwei Grundsätzen der Funktionslogik.

[36] Wird eine solche finitistische Sprachauffassung akzeptiert, so müssen die Allquantifikationen (bzw. die Existenzquantifikationen) gedeutet werden als Konjunktionen (bzw. Disjunktionen) von endlich vielen Sätzen. Eine solche Deutung quantifizierter Sätze setzt voraus, dass sich diese Sätze stets auf einen vorgegebenen Gegenstandsbereich beziehen, der lediglich endlich viele Elemente enthält.

abzählbaren Gegenstandsbereich quantifiziert wird, als Tautologien gelten können. Dennoch gibt es keine Indizien dafür, dass Carnap 1930 je den Versuch unternommen hat, Ramseys Vorschlag zu verwenden, um sein logizistisches Programm zu verteidigen. Dieser Vorschlag wird einzig im *Abriss der Logistik* kurz erwähnt und dort wird seine Zulässigkeit als umstritten bezeichnet (Carnap, 1929, S. 14).

Es ist zu vermuten, dass Carnap sich 1930 bewusst war, dass der von ihm definierte Begriff der Tautologie nicht das Gewünschte leisten. Jedoch hatte er zu dieser Zeit schlechterdings keine klare Vorstellung davon, weshalb auch die logischen Wahrheiten, die nicht auf Grund ihrer aussagenlogischen Struktur gelten, diejenigen Eigenschaften aufweisen sollten, die gemäss der Wittgensteinschen Analyse den Tautologien zukommen. Insbesondere sah er keinen Weg, wie er seinen von Wittgenstein übernommenen Begriff so erweitern konnte, dass er zugleich eine Grundlage für die folgenden beiden Behauptungen bietet: 1.) Die logischen Wahrheiten haben keinen Gehalt, weil sie keinen möglichen Fall ausschliessen. 2.) Die für den logizistischen Aufbau des Systems der klassischen Mathematik benötigten Prinzipien sind logische Wahrheiten. Und deshalb definierte Carnap den Begriff der logischen Wahrheit zu dieser Zeit stets nur für Sätze, die auf Grund ihrer aussagenlogischen Struktur gelten, um so zumindest eine plausible Grundlage für die erste dieser beiden Behauptungen zu besitzen.

2.7 Die Anwendbarkeit der Mathematik

Ich habe in den letzten Kapiteln diskutiert, wie Carnap mit seiner logizistischen Theorie der mathematischen Wahrheit die rationalistische Behauptung zu widerlegen versuchte, dass die mathematischen Theoreme synthetische Wahrheiten a priori sind. Jedoch liefert die These, dass die mathematischen Wahrheiten gehaltleer sind, nur eine Kritik an der rationalistischen Konzeption und noch keine Erklärung davon, welche Rolle die Mathematik in den empirischen Wissenschaften spielt. Diese These allein lässt daher eine entscheidende Frage unbeantwortet:

> Der Mathematiker braucht sich zwar innerhalb seines Gebietes nicht um diese Anwendung zu kümmern. Im Rahmen der Gesamtwissenschaft aber müssen wir selbstverständlich die Möglichkeit der Anwendung der Arithmetik auf Wirklichkeitssätze fordern; sonst könnte ja keine Physik betrieben werden. (Hahn et al., 1931, S. 142)

Angesichts der zentralen Rolle, die die Mathematik in den empirischen Wissenschaften und insbesondere in der Physik spielt, ist denn von einer Position in der Philosophie der Mathematik auch zu fordern, dass sie eine Erklärung dafür liefert, wie sich die Mathematik in den empirischen Wissenschaften anwenden lässt. Obwohl gerade die Logizisten betonen, dass die Philosophie der Mathematik das Problem der Anwendung nicht ignorieren darf (Carnap, 1930c, S. 309), resultiert diese Forderung also dennoch nicht aus einer spezifisch logizistischen Auffassung. Vielmehr ergibt sie sich daraus, dass „die Möglichkeit der Anwendung der Arithmetik" für die Physik entscheidend ist. Sie stellt also eine Forderung dar, die an jede akzeptable Position in der Philosophie der Mathematik zu stellen ist (Hahn et al., 1931, S. 141).

Wie also glaubte Carnap, ausgehend von seiner logizistischen Theorie der mathematischen Wahrheit die Rolle der Logik und der Mathematik und damit der Vernunft in den Wissenschaften klären zu können? Seine grundsätzliche Idee war die, dass die logischen Sätze verkappte Transformationsregeln sind, denen gemäss Sätze in andere Sätze transformiert werden können, und dass die Logik also überhaupt als ein System inferentieller Regeln verstanden werden kann.[37] Lassen sich zusätzlich alle mathematischen Sätze als logische Sätze erweisen, so artikulieren also auch die Sätze der Mathematik einzig Transformationsregeln eines inferentiellen Systems. Lässt sich schliesslich noch nachweisen, dass alle logischen Sätze Tautologien sind, so ist gezeigt, dass die Transformationen, die durch das logisch-mathematische System für zulässig erklärt werden, tautologische Transformationen sind, bei denen der Gehalt der Konklusion stets vollständig im Gehalt der Prämissen enthalten ist (Carnap, 1930a, S. 25).

Mittels seiner logizistischen Theorie der mathematischen Wahrheit glaubte Carnap also aufzeigen zu können, dass die logischen und die mathematischen Sätze im Rahmen der Gesamtwissenschaft einzig dazu dienen, Umformungen von empirischen Sätzen zu erleichtern. Damit ist die Vernunft nicht mehr länger nur negativ bestimmt als ein Vermögen, das keinen Beitrag zum Gehalt der empirischen Theorien liefert. Die Vernunft ist damit auch positiv bestimmt, und zwar als ein Vermögen der tautologischen Transformation von empirischen Sätzen.

Allerdings war Carnap nicht nur davon überzeugt, dass es ihm seine logizistische Theorie erlaubte, im Allgemeinen zu bestimmen, welche Rolle die Mathematik in den empirischen Wissenschaften spielt. Er war auch davon überzeugt, dass es das System der *Principia* erlaubt präzise zu zeigen, wie in Einzelfällen arithmetische Sätze zur Transformation von

[37] Es ist kaum zu bezweifeln, dass Carnap diese Idee aus Wittgensteins *Tractatus* übernahm. So bemerkte Wittgenstein im *Tractatus*: „Jeder Satz der Logik ist ein in Zeichen dargestellter modus ponens" (6.1264). Diese Bemerkung legt nahe, dass auch Wittgenstein die Sätze der Logik als verkappte Schlussregeln verstand.

Wirklichkeitssätzen verwendet werden können. Die *Principia* waren für ihn also 1930 nicht nur deshalb entscheidend, weil sie ansatzweise die Mathematik als Zweig der Logik erweisen. Das System von Russell und Whitehead war für ihn auch deshalb entscheidend, weil sich ausgehend von ihm im Detail nachweisen lässt, wie etwa arithmetische Gleichungen angewendet werden können.

Um aufzuzeigen, wie sich ausgehend von einer logizistischen Auffassung die Anwendung der Arithmetik erklären lässt, benützte Carnap unter anderem das folgende Beispiel (Hahn et al., 1931, S. 142):

P_1: In diesem Raum sind nur die Personen Hans und Peter

K: In diesem Raum sind zwei Personen

Der Logizist vermag nämlich zu zeigen, dass dieser Übergang aus rein logischen Gründen zulässig ist, und zwar mittels seiner Definitionen der natürlichen Zahlen (ibid.). Denn der Logizist versteht die natürlichen Zahlen als formale Bestimmungen von Begriffen (Carnap, 1931a, S. 93) und er definiert sie deshalb dadurch, dass er angibt, was es für einen Begriff heisst, dass ihm eine gewisse Anzahl zukommt. Da des Weiteren einem Begriff eine Anzahl n gerade dann zukommt, wenn unter ihn genau n Gegenstände fallen, definiert der Logizist also zum Beispiel die Anzahl Zwei wie folgt: ‚Die Anzahl des Begriffs φ ist zwei' (in Zeichen: ‚2(φ)') soll bedeuten:

1.) $(\exists x)(\exists y)(\sim (x = y) \,.\, \varphi(x) \,.\, \varphi(y) \,.\, (z)(\varphi(z) \supset x = z \vee y = z))$.[38]

Mit der Abkürzung: f(x): x ist eine Person in diesem Raum

kann die logizistische Interpretation von ‚In diesem Raum sind zwei Personen' deshalb wie folgt wiedergegeben werden:

2.) $(\exists x)(\exists y)(\sim (x = y) \,.\, f(x) \,.\, f(y) \,.\, (z)(f(z) \supset x = z \vee y = z))$.

Nun lässt sich leicht zeigen, dass der Übergang von ‚In diesem Raum sind nur die Personen Hans und Peter' zu ‚In diesem Raum sind zwei Personen' logisch zulässig ist. Denn mit den Abkürzungen: a: Hans

b: Peter

[38] Diese Definition wird von Carnap wiederholt als die logizistische Definition der Anzahl Zwei bezeichnet (Carnap, 1930a, S, 21; 1931a, S. 93). Es ist jedoch klar, dass diese Definition keine adäquate Definition der Anzahl Zwei ist. Bereits Frege hatte diese Definition verworfen, weil sie es nicht erlaubt, das Zahlzeichen ‚2' aus dem Satz ‚1+1=2' zu eliminieren (Frege, 1884, § 56). Lediglich im Aufsatz *Die Mathematik als Zweig der Logik* und im *Abriss der Logistik* erwähnte Carnap die Russellsche Definition der Kardinalzahlen als Klassen gleichmächtiger Klassen (Carnap, 1929, S. 50–51; 1930c, S. 302). Ich übernehme im Folgenden Carnaps ungenaue Terminologie: Wenn ich von den logizistischen Definitionen der natürlichen Zahlen spreche, so meine ich damit die 1.) entsprechenden Analysen von Aussagen der Form ‚Die Anzahl des Begriffs φ ist n'.

kann der erste dieser beiden Sätze wie folgt formalisiert werden:

3.) $\sim (a = b) \,.\, f(a) \,.\, f(b) \,.\, (z)(f(z) \supset a = z \vee b = z)$,

und aus 3.) folgt 2.) gemäss den Prinzipien der Quantorenlogik erster Stufe.

Damit ist zwar gezeigt, wie sich mittels der logizistischen Definitionen der natürlichen Zahlen Übergänge, in denen Zahlzeichen eingeführt werden, als rein logische Transformationen erweisen lassen. Die Frage, wie arithmetische Sätze zur Transformation von Wirklichkeitssätzen verwendet werden können, ist aber noch offen. Doch Carnap war davon überzeugt, dass sich auch diese Frage auf der Basis einer logizistischen Auffassung der Mathematik beantworten lässt.[39] Ich werde seine Grundidee anhand des folgenden Beispiels erläutern:

P_1: Berta gehört eine Katze

P_2: Berta gehört ein Hund[40]

P_3: Nichts ist sowohl eine Katze, die Berta gehört, als auch ein Hund, der Berta gehört

P_4: Etwas ist genau dann ein Tier, das Berta gehört, wenn es eine Katze ist, die Berta gehört, oder ein Hund ist, der Berta gehört

---

K: Berta gehören zwei Tiere

Werden die folgenden Abkürzungen verwendet:

f(x): x ist eine Katze, die Berta gehört

g(x): x ist ein Hund, der Berta gehört

h(x): x ist ein Tier, das Berta gehört,

so lässt sich dieser Schluss wie folgt formalisieren:

P_1: Die Anzahl von f ist 1

P_2: Die Anzahl von g ist 1

P_3: $\sim (\exists x)(f(x) \,.\, g(x))$

P_4: $(x)(h(x) \equiv (f(x) \vee g(x)))$

K: Die Anzahl von h ist 2

[39] Explizit diskutierte Carnap in seinen Publikationen der Jahre 1930 und 1931 lediglich die Übergänge von Wirklichkeitssätzen ohne mathematische Zeichen zu solchen mit mathematischen Zeichen. Erst im Buch *Foundations of Logic and Mathematics* von 1939 wird auch die Anwendung von mathematischen Theoremen ausführlich behandelt (Carnap, 1939, § 19). Meines Erachtens spricht aber nichts gegen die Annahme, dass die im Folgenden behandelten Aspekte der 1939 skizzierten Theorie von Carnap bereits 1930 akzeptiert wurden.

[40] P_1 und P_2 sind als Anzahlangaben zu verstehen, ‚eine' in P_1 und ‚ein' in P_2 somit als Zahlwörter.

Werden P_1 und P_2 sowie die Konklusion K unter Verwendung der logizistischen Definitionen der natürlichen Zahlen weiter analysiert, so nimmt der Schluss die folgende Gestalt an:

P_1: $(\exists x)(f(x) \,.\, (z)(f(z) \supset x = z))$

P_2: $(\exists x)(g(x) \,.\, (z)(g(z) \supset x = z))$

P_3: $\sim (\exists x)(f(x) \,.\, g(x))$

P_4: $(x)(h(x) \equiv (f(x) \vee g(x)))$

K: $(\exists x)(\exists y)(\sim (x = y) \,.\, h(x) \,.\, h(y) \,.\, (z)(h(z) \supset x = z \vee y = z))$

Ausgehend von dieser Formalisierung lässt sich leicht zeigen, dass der Schluss mit Bertas Tieren gültig ist in einem System der Quantorenlogik erster Stufe mit Identität. Doch obwohl sich dieser Schluss bereits ausgehend von den logizistischen Definitionen der natürlichen Zahlen als eine rein logische Transformation erweisen lässt, kann dieser Schluss dennoch auch als eine Anwendung des arithmetischen Satzes ‚1+1=2' analysiert werden.

Mittels der logizistischen Definition der Addition lässt sich nämlich das folgende Theorem beweisen:

4.) $(\varphi)(\psi)(\chi)[1(\varphi) \,.\, 1(\psi) \,.\, \sim (\exists x)(\varphi(x) \,.\, \psi(x)) \,.\, (x)(\chi(x) \equiv (\varphi(x) \vee \psi(x))) \supset 1{+}1(\chi)]$

Aus 4.) ergibt sich zusammen mit dem arithmetischen Satz ‚1+1=2':

5.) $(\varphi)(\psi)(\chi)[1(\varphi) \,.\, 1(\psi) \,.\, \sim (\exists x)(\varphi(x) \,.\, \psi(x)) \,.\, (x)(\chi(x) \equiv (\varphi(x) \vee \psi(x))) \supset 2(\chi)]$

Durch Allinstantiation ergibt sich aus 5):

6.) $1(f) \,.\, 1(g) \,.\, \sim (\exists x)(f(x) \,.\, g(x)) \,.\, (x)(h(x) \equiv (f(x) \vee g(x))) \supset 2(g)$

Und aus 6.) ergibt sich zusammen mit den Prämissen P_1–P_4 gemäss aussagenlogischer Schlussregeln die Konklusion K.

Ist in einem System ‚1+1=2' bewiesen und wird in ihm die Addition logizistisch definiert, so lässt sich also der Schluss mit Bertas Tieren in diesem System ausserordentlich einfach als zulässig erweisen. Doch aus der Beweisbarkeit von ‚1+1=2' und der logizistischen Analyse der Addition ergibt sich nicht nur, dass dieser Schluss zulässig ist, sondern auch, dass jeder andere Schluss zulässig ist, der denselben logischen Aufbau hat. Der Beweis von ‚1+1=2' erlaubt es also, eine Vielzahl von Transformationen auf einen Schlag als zulässig zu erweisen (Carnap, 1939, S. 47). Des Weiteren ergibt sich daraus, dass ‚1+1=2' in einem logizistischen System ein rein logischer Satz ist, dass alle diese Transformationen aus rein logischen Gründen zulässig sind. Genauer zeigt die logizistische Analyse, dass dieser arithmetische Satz überhaupt nur eine verkappte Schlussregel ist. 5.) ist ja nichts anderes als ein allgemeines Prinzip, dem gewisse Schlüsse, die sich im Rahmen der Quantorenlogik erster Stufe mit

Identität formulieren lassen, gemäss sind (Putnam, 1975, S. 26–29). Damit aber ist erklärt, welche Rolle arithmetische Gleichungen bei der Transformation von empirischen Sätzen spielen: Die logizistische Analyse erweist ‚1+1=2' als eine logische Schlussregel und, da die logischen Prinzipien Tautologien sind, also als ein Prinzip, das einzig der tautologischen Transformation von Sätzen dient.

Carnap war um 1930 davon überzeugt, dass solche Beispiele wie die eben diskutierten zeigen, wie sich auf der Grundlage der logizistischen Auffassung die Anwendung der Mathematik erklären lässt: Mittels der logizistischen Definitionen sollten die arithmetischen Sätze als allgemeine logische Schlussprinzipien erwiesen werden und damit als Prinzipien der tautologischen Transformationen.[41]

2.8 Logik und Metalogik: der Einfluss von Tarski

In Carnaps logizistischem Programm ist also der auf die Anwendung der Mathematik bezogene Teil zumindest ansatzweise überzeugend. Zwar beruht auch seine Lösung des Problems, welche Rolle die Logik und die Mathematik in den empirischen Wissenschaften spielen, auf der These, dass die logischen und die mathematischen Theoreme Tautologien sind. Doch wenn diese These vorausgesetzt wird, so ist Carnaps Analyse von einfachen Schlüssen der angewandten Arithmetik überzeugend. Es erstaunt deshalb nicht, dass sich auch noch in der *Logischen Syntax* der Hinweis findet, dass der Logizismus das Problem der Anwendbarkeit zu lösen vermag (Carnap, 1934a, S. 254–255). Der von Carnap 1930 versuchte Nachweis der These, dass die mathematischen Wahrheiten Tautologien sind, muss hingegen als gescheitert gelten. Und tatsächlich verwarf er auch bereits Anfang 1931 seine logizistische Theorie der mathematischen Wahrheit vollständig und begann damit, die ersten Ansätze zu dem Projekt zu entwickeln, das er dann in seiner *Logischen Syntax* präsentierte.

Wie ich in Kapitel 3 im Detail diskutieren werde, stand am Anfang der Entwicklung, die Carnap zu seiner *Logischen Syntax* führte, das Programm, aus Wittgensteins *Tractatus* eine vollständig präzise Theorie der logischen Wahrheit zu extrahieren. Dieses Programm basierte in entscheidender Weise auf der Idee, dass die Wittgensteinsche Unterscheidung zwischen Sagen und Zeigen durch eine Unterscheidung zwischen Logik und Metalogik ersetzt werden kann. Im Rahmen dieses Programms unterschied Carnap daher deutlich zwischen den logischen Zeichen, die dazu dienen, um komplexere Sätze aus einfacheren Sätzen zu bilden, und solchen Begriffen wie logische Wahrheit oder logische Folgerung, die in die Metalogik

[41] Offensichtlich vermag die von Carnap vorgenommene logizistische Analyse von einfachen Schlüssen der angewandten Arithmetik die Anwendbarkeit der Mathematik in den empirischen Wissenschaften nicht vollständig zu erklären. Damit eine logizistische Erklärung der Anwendbarkeit erreicht wäre, müsste ein allgemeines Übersetzungsmanual aufgestellt werden, das es gestattet, beliebige Argumente mit mathematischen Ausdrücken in solche zu übersetzen, die ohne mathematische Ausdrücke auskommen.

gehören und die zur Beschreibung von Eigenschaften von Sätzen und Beziehungen zwischen Sätzen dienen.

Mit diesem Schritt zu einer Unterscheidung zwischen Logik und Metalogik brach Carnap mit einem wesentlichen Element seiner früheren philosophischen Programme. In der zweiten Hälfte der 1920er Jahren hatte er in Übereinstimmung mit der von Frege und Russell entwickelten universalistischen Logikkonzeption geltend gemacht, dass die Philosophie der Logik ohne eine Metaperspektive auskommen kann (Heijenoort, 1967, S. 326). In Übereinstimmung mit Frege und Russell hatte er also behauptet, dass es ein korrektes logisches System gibt, das allumfassend ist und in dem daher alle Begriffe zu definieren sind (Goldfarb, 2005, S. 186). Genauer war Carnap davon überzeugt gewesen, dass das System der einfachen Typentheorie das allumfassende Logiksystem ist und eine vereinfachte Version der Sprache der *Principia* das logische Gerüst einer idealen Sprache, in der alles, was überhaupt gesagt werden kann, ausgedrückt werden kann.

Da sich Carnap mit der Einführung einer Unterscheidung zwischen Logik und Metalogik von der Konzeption distanzierte, die er in den 1920er Jahren vertreten hatte, und einen wichtigen Schritt hin zu dem metalogischen Programm machte, das ihn zur *Logischen Syntax* führte, stellt sich die Frage, weshalb er diesen Schritt machte. Zum Schluss dieses zweiten Kapitels werde ich kurz auf diese Frage eingehen. Es waren allerdings nicht Schwierigkeiten, mit denen Carnaps logizistische Theorie der mathematischen Wahrheit konfrontiert war, die ihn dazu brachten, diesen Schritt zu machen. Vielmehr akzeptiere er eine Unterscheidung zwischen Logik und Metalogik auf Grund von Schwierigkeiten, mit denen ein anderes Projekt konfrontiert war, das er in der zweiten Hälfte der 1920er Jahren zu realisieren versucht hatte.

Insbesondere zwischen 1927 und 1929 verfolgte Carnap ein logisch-mathematisches Grundlagenprojekt, das eine Klärung des Status der axiomatischen Untersuchungen erbringen sollte, die von Hilbert und seinen Schülern durchgeführt wurden und in deren Zentrum Fragen nach der Widerspruchsfreiheit, Unabhängigkeit und Vollständigkeit axiomatischer Systeme standen. Carnaps Projekt war ein Versuch, eine universalistische Konzeption durch den Nachweis zu verteidigen, dass auch dasjenige, was Hilbert in seiner Beweistheorie untersucht, in der einen Sprache der *Principia* ausgedrückt werden kann (Coffa, 1991, S. 273–274).[42] Und das Scheitern dieses Projektes brachte Carnap dazu, eine Unterscheidung zwischen Logik und Metalogik zu akzeptieren.

[42] Obwohl diese allgemeine Axiomatik das hauptsächliche Projekt war, das Carnap nach Fertigstellung des *Logischen Aufbaus* verfolgte, publizierte er keine umfassende Darstellung. Er publizierte lediglich einen einzigen Aufsatz, in dem er sein Projekt in einigem Detail skizzierte (Carnap, 1927). Das Manuskript *Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik*, an dem er vor allem arbeitete und das einen detaillierten Aufbau einer solchen Theorie liefern sollte, blieb unvollendet und wurde von Carnap im Laufe des Jahres 1930 verworfen. Allerdings wurde dieses Manuskript inzwischen publiziert (Carnap, 2000).

Die Kernidee von Carnaps Projekt war die folgende: In Hilberts axiomatischen Untersuchungen wird angenommen, dass die in einem axiomatischen System undefinierten Grundzeichen erst durch die Axiome eine Bedeutung erhalten und also durch diese Axiome implizit definiert werden (Carnap, 1927, S. 360–361). Allerdings erhalten diese implizit definierten Zeichen durch die Axiome keine vollständig bestimmte Bedeutung und sie bezeichnen daher auch überhaupt keine Begriffe, sondern Variablen (ibid., S. 370–371).[43] Wenn axiomatische Systeme in der von Hilbert vorgeschlagenen Weise aufgefasst werden, so sind die Axiome daher keine Aussagen, sondern Aussagefunktionen. Und da die Axiome eines Axiomensystems stets mittels Konjunktion zu einem einzigen Axiom verbunden werden können, sind also auch Axiomensysteme Aussagefunktionen.[44]

Da somit Axiomensysteme Aussagefunktionen sind und da nach Carnap die allgemeine Axiomatik formale Eigenschaften von Axiomensystemen und Beziehungen zwischen solchen Systemen untersucht, ergibt sich, dass Eigenschaften von Aussagefunktionen und Beziehungen zwischen solchen Funktionen Gegenstand der allgemeinen Axiomatik sind. Damit ist gezeigt, dass die allgemeine Axiomatik als Teilgebiet der Relationstheorie aufgefasst werden kann und in der Sprache der einfachen Typentheorie formulierbar ist.

Carnaps Versuch, die allgemeine Axiomatik im Rahmen der einfachen Typentheorie zu rekonstruieren, war jedoch zum Scheitern verurteilt. Im Zentrum seines Projektes stand der Beweis eines Satzes, den Carnap als „Gabelbarkeitssatz“ bezeichnete und der im Wesentlichen besagte, dass ein konsistentes Axiomensystem genau dann vollständig ist, wenn es kategorisch ist (Awodey & Carus, 2001, S. 145; Carnap, 2000, S. 133–137). Vom Standpunkt der heutigen Modelltheorie aus betrachtet, ist dieser Gabelbarkeitssatz jedoch klarerweise falsch. So lässt sich zum Beispiel im Rahmen der Prädikatenlogik zweiter Stufe ein Axiomensystem der Peano-Arithmetik formulieren, das kategorisch ist und also nur ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes Modell besitzt. Gödel jedoch zeigte mit seinem Unvollständigkeitssatz, wie auch im Rahmen einer solchen Axiomatisierung der Peano-Arithmetik Sätze konstruiert werden können, die in diesem System unentscheidbar sind. Obwohl dieses Axiomensystem kategorisch ist, ist es also dennoch nicht vollständig.

---

[43] Carnap versuchte diese These mit dem folgenden Argument zu stützen: Ein Begriff ist eine Aussagefunktion und es ist ihm wesentlich, dass jeder Gegenstand entweder unter ihn fällt oder nicht fällt (Carnap, 1927, S. 355). Auch trifft jede Begriffseigenschaft entweder auf ihn zu oder nicht. Den sogenannten implizit definierten Begriffen – Carnap nannte sie uneigentliche Begriffe – fehlt jedoch diese Bestimmtheit: Die Frage, ob ein einzelner Gegenstand unter einen uneigentlichen Begriff fällt oder nicht, hat keinen Sinn. Zudem gibt es uneigentliche Begriffe, auf die Begriffseigenschaften weder zutreffen noch nicht zutreffen (ibid., S. 367). Da somit Zeichen für uneigentliche Begriffe keine bestimmte Bedeutung haben und da ein Zeichen nur dann eine Konstante bezeichnet, wenn es eine bestimmte Bedeutung hat, sind uneigentliche Begriffe also nicht Konstanten, sondern Variablen (ibid., S. 370–371).

[44] Es ist offensichtlich, dass sich Carnap mit dieser Rekonstruktion der Hilbertschen Beweistheorie an Fregeschen Gedanken orientierte. Auch Frege gelangte ja in seiner Auseinandersetzung mit Hilbert zu einer vergleichbaren Analyse (Frege, 1906; Ricketts, 1997).

Allerdings unterscheidet sich die Begrifflichkeit, die Carnap in seiner allgemeinen Axiomatik definierte, grundsätzlich von derjenigen, die heutzutage in der Modelltheorie verwendet wird. Die Schwierigkeit mit den Resultaten, die Carnap begründete, ist denn auch nicht die, dass sie falsch sind. Die Schwierigkeit ist vielmehr die, dass es ihm mit seiner Begrifflichkeit überhaupt nicht gelang, diejenigen Probleme anzugehen, die er eigentlich diskutieren wollte (Awodey & Carus, 2001, S. 159). Insbesondere war seine Begrifflichkeit aus dem Grund inadäquat, weil sie auf der Voraussetzung beruhte, dass die Untersuchungen axiomatischer Systeme und die axiomatischen Systeme selbst in ein und derselben Sprache ausgedrückt werden können:

> Not only were all possible axiom systems fragments of this universal system; all logical analysis *of* and statements *about* this system had also to be stated within this same universal system. So there was no distinction for Carnap between provability in an axiom system and the provability of a statement *about* axiom systems. Or, as we would now say, there was no distinction between the object language and the metalanguage. (ibid., S. 163)

Anfang 1930 begann Carnap auch zu realisieren, dass sein Projekt einer allgemeinen Axiomatik grundsätzlich verfehlt war. Entscheidend hierfür war der Einfluss von Tarski. Im Februar 1930 hielt Tarski in Wien zwei Vorträge über Metamathematik (Stadler, 1997, S. 455). Diese beiden Vorträge sowie private Diskussionen, die Carnap mit Tarski führte, überzeugten ihn schliesslich davon, dass er einen Weg finden musste, eine Metaperspektive als zulässig zu erweisen. Am 24. Februar bemerkte er in seinem Tagebuch: „Tarski visits me ... talked about my Axiomatics. It seems correct, but certain concepts don't capture what is intended; they must be defined metamathematically rather than mathematically" (Awodey & Carus, 2001, S. 163).

Wie bereits erwähnt, war diese Einsicht, dass eine Unterscheidung zwischen Logik und Metalogik notwendig ist, der erste Schritt hin zu der Position, die Carnap dann 1934 in seiner *Logischen Syntax* vertrat. Doch auch wenn er bereits 1930 zu dieser Einsicht gelangte, verging dennoch noch eine geraume Zeit, bevor es ihm gelang, diese Unterscheidung in einer Weise zu artikulieren, die ihn selbst befriedigte. Wie ich im folgenden Kapitel 3 zeigen werde, war die Entwicklung, die ihn zwischen 1931 und 1933 zu der Position der *Logischen Syntax der Sprache* führte, in entscheidender Weise vom Bemühen geprägt, eine zufriedenstellende Konzeption von Metalogik zu artikulieren.

3 Metalogik und Toleranz: der Weg zur *Logischen Syntax*

Carnaps *Logische Syntax der Sprache* ist ein Versuch ein Begriffssystem zu entwickeln, das es erlaubt, die logischen Eigenschaften verschiedener Sprachformen sowie die Vorzüge und Nachteile von Sprachformen für gegebene Zwecke in vollständig präziser Weise zu diskutieren. Geprägt ist die entwickelte Begrifflichkeit von der Idee, dass Präzision im Reden über die Logik dadurch zu erreichen ist, dass Sprachen als Kalküle behandelt werden. Genauer werden in der *Logischen Syntax* Sprachen als Systeme von Form- und Umformungsbestimmungen behandelt. Die Formbestimmungen beziehen sich auf die Elemente des Kalküls – die Zeichen – und bestimmen, wann ein Ausdruck, das heisst eine endliche Reihe von Zeichen, ein Satz des Kalküls ist. Die Umformungsbestimmungen hingegen legen fest, wann im Kalkül von einer Menge von Sätzen zu einem Satz übergegangen werden darf (Carnap, 1934a, S. 4).

Dass Sprachen als Kalküle behandelt werden, heisst also, dass sie als Systeme von Form- und Umformungsbestimmungen behandelt werden, und das wiederum heisst, dass sie als syntaktisch spezifizierte Systeme behandelt werden. In der *Logischen Syntax* gelten nämlich sowohl die Form- als auch die Umformungsregeln als syntaktische Bestimmungen (ibid., S. 2). Syntaktische Bestimmungen werden dadurch charakterisiert, dass sie formal sind, und der Begriff des Formalen wird in der folgenden Weise eingeführt:

> *Formal* soll eine Theorie, eine Regel, eine Definition od. dgl. heißen, wenn in ihr auf die Bedeutung der Zeichen (z. B. der Wörter) und auf den Sinn der Ausdrücke (z. B. der Sätze) nicht Bezug genommen wird, sondern nur auf Art und Reihenfolge der Zeichen, aus denen die Ausdrücke aufgebaut sind. (ibid., S. 1)

In der *Logischen Syntax* kombinierte Carnap diesen syntaktischen Zugang zur Logik mit einer toleranten Einstellung gegenüber der Wahl von Sprachformen: „… *wir wollen nicht Verbote aufstellen, sondern Festsetzungen treffen*. … *In der Logik gibt es keine Moral*. Jeder mag seine Logik, d.h. seine Sprachform, aufbauen wie er will“ (ibid., S. 51–52). Dieses Toleranzprinzip ist gegen eine Auffassung gerichtet, der nur gewisse Ausdrucksweisen und Schlussweisen als legitim gelten. Akzeptiert man dieses Prinzip, so wird man nicht länger versuchen, beim Aufbau einer Sprache nachzuweisen, dass die konstruierte Sprache die „richtige“ ist oder die „wahre Logik“ wiedergibt (ibid., S. V). Wie eine Sprachform aufgebaut werden soll, gilt einem dann als „Sache der Festsetzung“ (ibid., S. 133) und also als eine

Frage, die einzig und allein auf Grund von Erwägungen der Zweckmässigkeit entschieden werden kann.

Die Position, die Carnap 1934 in der *Logischen Syntax* vertrat, unterscheidet sich somit deutlich von derjenigen, die er etwa 1930 in seinem Aufsatz *Die Mathematik als Zweig der Logik* entwickelt hatte. In jenem Aufsatz setzte er ja voraus, dass die einfache Typentheorie das eine korrekte logische System liefert, und verfolgte also ein Projekt, das nicht mit dem Toleranzprinzip in Einklang steht.

Die Entwicklung, die Carnap von seiner logizistischen Position von 1930 zum Standpunkt der *Logischen Syntax* führte, lässt sich in zwei Phasen unterteilen (Awodey & Carus, 2007, S. 25): In einer Reihe von Schritten entwickelte Carnap zunächst eine Konzeption von Syntax oder Metalogik, gemäss der die Metalogik eine Theorie sprachlicher Formen ist, in der einzig auf Reihen von Zeichen einer gegebenen Sprache Bezug genommen wird. Im Laufe dieser ersten Phase verwarf er zudem die Sprache der einfachen Typentheorie zugunsten der Sprache, die dann in der *Logischen Syntax* als ‚Sprache I' bezeichnet wird. Die zweite Phase begann im Herbst 1932 mit dem Schritt zum Toleranzprinzip. Mit diesem Schritt verwarf Carnap nicht nur die Idee, dass es die eine korrekte Sprache der Wissenschaft gibt. Er erweiterte auch seine frühere Konzeption von Syntax und wandte sich dem Projekt einer allgemeinen Syntax zu, in dessen Rahmen er versuchte, ein System von syntaktischen Begriffen zu definieren, die „so weit gefaßt sind, daß sie auf beliebige Sprachen bezogen werden können" (Carnap, 1934a, S. 120).

In seiner intellektuellen Autobiographie führt Carnap aus, dass eine schlaflose Nacht am Anfang dieser gesamten Entwicklung stand:

> … the whole theory of language structure and its possible applications in philosophy came to me like a vision during a sleepless night in January 1931, when I was ill. On the following day, still in bed with a fever, I wrote down my ideas on forty-four pages under the title *Attempt at a Metalogic*. These shorthand notes were the first version of my book *Logical Syntax*. (Carnap, 1963a, S. 53)

Die Autobiographie suggeriert somit, dass eine mit einer Vision vergleichbare Einsicht Carnap zu seiner syntaktischen Konzeption von Logik führte, und in der wichtigsten Untersuchung, die bisher zu diesem Thema publiziert wurde – dem Aufsatz *Carnap's Dream: Gödel, Wittgenstein, and Logical Syntax* – , setzen Awodey und Carus jene schlaflose Nacht sogar mit einem Ausbruch aus einem „Wittgensteinschen Gefängnis" gleich (Awodey & Carus, 2007, S. 35). Wie ich in diesem Kapitel zeigen werde, entwickelte Carnap jedoch seine

Syntaxkonzeption keineswegs über Nacht: Vielmehr entwickelte er diese Konzeption in einer Reihe von Schritten, mit denen er versuchte, Probleme zu lösen, mit denen sein Projekt einer vollständig präzisen Konstruktion der logischen Sprache konfrontiert war. Ausserdem werde ich zeigen, dass er sich mit dem Schritt zu seinem metalogischen Programm auch nicht, wie von Awodey und Carus behauptet (ibid., S. 32–35), grundsätzlich und umfassend vom *Tractatus* distanzierte. Vielmehr prägten Wittgensteinsche Ideen und insbesondere ein von Wittgenstein beeinflusstes Sprachverständnis die metalogischen Projekte, die Carnap 1931 verfolgte.

Um die eben aufgestellten Thesen zu begründen, werde ich zunächst diese metalogischen Projekte von 1931 diskutieren. Ich beginne dabei mit dem Manuskript, das Carnap am 22. Januar 1931, dem Tag nach jener schlaflosen Nacht, niederschrieb. In diesem *Versuch einer Metalogik* entwickelte er nämlich sein erstes Projekt, das auf einer deutlichen Unterscheidung zwischen Logik und Metalogik aufbaute. Dann zeige ich auf, welche Schritte Carnap 1931 vom *Versuch* hin zu einer syntaktischen Konzeption von Logik führten. Zum Schluss diskutiere ich, aus welchen Gründen er im Herbst 1932 dazu gelangte, ein Toleranzprinzip in der Logik zu akzeptieren.

3.1 *Versuch einer Metalogik*: die Konstruktion der eigentlichen Sprache

Welche Ziele verfolgte Carnap also im *Versuch*? Meines Erachtens wollte er in diesem Manuskript die von Wittgenstein im *Tractatus* gegebene Darstellung der Logik in einer Weise umformulieren, die auf all diejenigen Elemente von Wittgensteins Zugang verzichtet, die nicht in Einklang stehen mit den Prinzipien einer wissenschaftlichen Weltauffassung.[45] Carnap versuchte also, die Logik des *Tractatus* loszulösen von Wittgensteins Unterscheidung zwischen Sagen und Zeigen und allgemeiner von der von ihm in seiner Autobiographie als „philosophy of the ‚ineffable‘, and of the ‚higher things‘“ (Carnap, 1963a, S. 28) bezeichneten Dimension des *Tractatus*.

Um die Erläuterungen des *Tractatus* als präzise Definitionen umformulieren zu können, ersetzte Carnap die Unterscheidung zwischen Sagen und Zeigen durch eine Unterscheidung zwischen Logik und Metalogik: Logische Eigenschaften sind gemäss dem *Tractatus* interne Eigenschaften von Sätzen, die sich in der Sprache zeigen, deren Zutreffen aber nicht durch Sätze ausgedrückt werden kann (4.122). Im *Versuch* hingegen führte Carnap eine Unterscheidung ein zwischen den logischen Ausdrücken, die verwendet werden, um komplexere Sätze aus einfacheren Sätzen zu bilden, und den metalogischen Ausdrücken.

[45] Im Folgenden diskutiere ich ausschliesslich den ersten Teil des *Versuchs*. Auf den zweiten Teil, der einer metalogischen Theorie der Arithmetik gewidmet ist, werde ich in Kapitel 4.1 ausführlicher eingehen.

Dann ersetzte er Wittgensteins interne Eigenschaften durch metalogische Begriffe, indem er voraussetzte, dass mittels metalogischer Ausdrücke über die logischen Eigenschaften von Sätzen gesprochen werden kann. Schliesslich behauptete er, dass dieser Schritt es erlaubt, die Erläuterungen des *Tractatus* als vollständig präzise metalogische Definitionen umzuformulieren.

Im *Versuch* entwickelte Carnap dieses metalogische Projekt, indem er eine Mustersprache konstruierte – die sogenannte eigentliche Sprache (Carnap, 1931b, S. 1) –, die in ihren Ausdrucksmitteln einer Sprache der Quantorenlogik erster Stufe vergleichbar ist. Um die eben aufgestellten Thesen zu begründen, werde ich daher im Folgenden in einigem Detail darauf eingehen, wie er diese eigentliche Sprache konstruierte, und dabei werde ich insbesondere die entscheidenden Parallelen und Differenzen zwischen dem *Versuch* und dem *Tractatus* diskutieren.

In seiner Konstruktion charakterisierte Carnap in einem ersten Schritt das deskriptive Vokabular seiner eigentlichen Sprache und legte fest, welche Typen von Variablen vorkommen. Als deskriptive Terme führte er konstante Individualzeichen und konstante Funktoren ein. Als Variablen führte er variable Individualzeichen und variable Funktoren ein.[46] Dann definierte er die einfachsten Sätze seiner Sprache – die Atomsätze – als Zeichenreihen, die aus einem konstanten Funktor bestehen, gefolgt von einer Reihe konstanter Individualzeichen als Argumente (ibid., S. 1–2).

Dass beim Aufbau einer Sprache zunächst ihr Vokabular zu spezifizieren ist und dass ihre einfachsten Sätze durch eine Beschreibung ihres syntaktischen Aufbaus eingeführt werden sollen, ist zugegebenermassen keine sonderlich Wittgensteinsche Idee: Im *Tractatus* wird keine ideale Sprache aus vorgängig spezifizierten Elementarsätzen aufgebaut. Wittgenstein führte den Begriff des Elementarsatzes ein, um den Endpunkt der logischen Analyse umgangssprachlicher Sätze zu charakterisieren (4.221), und er erachtete es als unmöglich, die besondere logische Form von Elementarsätzen a priori angeben zu können (5.555–5.5571).

Doch auch wenn Carnaps erster Schritt in seiner Konstruktion nicht von Wittgensteinschen Gedanken geprägt war, stützte er sich bereits beim zweiten Schritt – bei der Einführung der logischen Zeichen – in aller Deutlichkeit auf Ideen, die im *Tractatus* entwickelt werden. In der eigentlichen Sprache werden komplexe Sätze aus Atomsätzen mittels der logischen

[46] Hinsichtlich des primitiven Vokabulars unterscheidet sich also die eigentliche Sprache deutlich von der Sprache I der *Logischen Syntax*. Allerdings bemerkte Carnap im *Versuch* bereits, dass Koordinatenbezeichnungen anstelle von Eigennamen verwendet werden könnten (Carnap, 1913b, S. 1). Zudem stellte er sich auch bereits die Frage, ob auf die Einführung variabler Funktoren besser zu verzichten wäre (ibid., S. 2).

Junktoren und einem unbeschränkten Existenzquantor gebildet.[47] Carnap führte diese komplexen Sätze wie folgt ein: Er setzte den Wahrheitsbegriff als undefinierten Grundbegriff der Metalogik voraus (Carnap, 1931b, S. 3) und führte dann sogenannte Satzfestsetzungen ein. Diese Satzfestsetzungen definieren Wahrheitsfunktionen der Atomsätze (ibid.) und ermöglichen es daher, die Bedeutung der logischen Zeichen zu bestimmen. So führte Carnap im *Versuch* etwa das Implikationszeichen ‚⊃' durch die Satzfestsetzung ein, dass ein komplexer Satz, der aus einem Atomsatz S besteht, gefolgt vom Zeichen ‚⊃', gefolgt von einem Atomsatz S', dann und nur dann falsch ist, wenn S wahr ist und S' falsch (ibid., S. 8). Da er nicht voraussetzte, dass sich Satzfestsetzungen nur auf endliche Mengen von Sätzen beziehen können, konnte er auch den Existenzquantor durch eine solche Festsetzung einführen, und zwar als ein Mittel, um unendliche Disjunktionen von Atomsätzen auszudrücken (ibid., S. 12).

Mit dem Begriff der Satzfestsetzung versuchte Carnap also, Wittgensteins Darstellung des Sinnes komplexer Sätze in eine Theorie der Bedeutung der logischen Zeichen zu transformieren: Gemäss dem *Tractatus* ist der Sinn eines komplexen Satzes durch seine Wahrheitsbedingungen bestimmt (4.431) und Carnap übernahm diese Idee im *Versuch*. Er verwarf jedoch Wittgensteins These, dass die wahrheitsfunktionalen Abhängigkeiten, die den Sinn komplexer Sätze determinieren, sich nur in der Sprache zeigen (4.022), und er ersetzte diese These durch die Behauptung, dass mittels metalogischer Terme angegeben werden kann, wie die Wahrheitswerte komplexer Sätze von den Wahrheitswerten einfacherer Sätze abhängen. Und da er den Sinn komplexer Sätze als determiniert erachtete durch solche wahrheitsfunktionale Abhängigkeiten, konnte er metalogische Beschreibungen dieser Abhängigkeiten verwenden, um die logischen Zeichen mittels Definitionen in die eigentliche Sprache einzuführen.[48]

In einem dritten Schritt definierte Carnap den Begriff der logischen Folge und den Begriff der Tautologizität und auch mit diesen Definitionen übernahm er Ideen, die von Wittgenstein entwickelt wurden: Im *Tractatus* wird eine Tautologie als derjenige Grenzfall einer Wahrheitsfunktion definiert, der durch alle Wahrheitsmöglichkeiten der Elementarsätze

[47] Die eigentliche Sprache des *Versuchs* enthielt zwar variable Funktoren, sie liess aber dennoch keine höherstufigen Quantifikationen zu. Zudem liess sie auch keine unbeschränkten Allquantifikationen zu, sondern nur Allquantifikationen über endliche Bereiche. Carnap musste daher auch Negationen von unbeschränkten Existenzquantifikationen ausschliessen. Allerdings diskutiere er diesen Punkt im *Versuch* nicht im Detail. Er bemerkte lediglich, dass Existenzquantifikationen nur dann vollständig determiniert sind, wenn sie auf einen endlichen Bereich bezogen sind (Carnap, 1931b, S. 14).

[48] Ich kann hier nicht auf die Frage eingehen, ob die von Carnap im *Versuch* vorgeschlagene Interpretation des Existenzquantors in Einklang steht mit derjenigen, die sich im *Tractatus* findet. Es ist allerdings nicht unplausibel zu behaupten, dass Carnap den *Tractatus* so verstand, dass darin eine substitutionelle Interpretation der Quantoren vorgeschlagen wird.

verifiziert wird (4.46; Ricketts, 1996a, S. 83). Der Begriff der logischen Folge wird wie folgt definiert:

> Sind die Wahrheitsgründe, die einer Anzahl von Sätzen gemeinsam sind, sämtlich auch Wahrheitsgründe eines bestimmten Satzes, so sagen wir, die Wahrheit dieses Satzes folge aus der Wahrheit jener Sätze. (5.11)

Im *Versuch* definierte Carnap eine Tautologie als einen Satz, der wahr ist unter jeder Verteilung von Wahrheitswerten auf die Atomsätze (Carnap, 1931b, S. 5). Den Begriff der logischen Folge führte er wie folgt ein: Ein Satz S folgt aus einer Klasse γ von Sätzen, wenn jede Verteilung von Wahrheitswerten auf die Atomsätze, die alle Elemente von γ verifiziert, auch S verifiziert (ibid.).

Allerdings besteht eine offenkundige Differenz zwischen den Definitionen, die sich im *Versuch* finden, und denjenigen des *Tractatus*: Im *Tractatus* wird der Begriff der Wahrheitswertverteilung nicht verwendet. Wittgensteins Definitionen beruhen auf dem Begriff des Wahrheitsgrundes und die Wahrheitsgründe eines Satzes werden definiert als diejenigen Möglichkeiten des Bestehens und Nichtbestehens von Sachverhalten, die den Satz verifizieren (4.3; 5.101). Doch abgesehen davon, dass Carnaps Darstellung formaler ist als diejenige des *Tractatus*, lässt sich nur noch eine einzige weitere Differenz erkennen: Während es gemäss dem *Tractatus* nicht mittels der Sprache ausgedrückt werden kann, dass ein Satz eine Tautologie ist oder dass ein Satz aus einem anderen Satz logisch folgt, kann dies gemäss dem *Versuch* mittels metalogischer Terme zum Ausdruck gebracht werden (Carnap, 1931b, S. 9).

Diese metalogische Theorie der logischen Wahrheit und der logischen Folge steht im Zentrum des *Versuchs.* Die Motivation hinter dem Projekt, das Carnap in diesem Manuskript verfolgte, wurzelt somit in der fundamentalen Bedeutung, die der Wiener Kreis Wittgensteins Kritik an Freges Logikkonzeption zuschrieb: Gemäss Freges universalistischer Auffassung sind logische Wahrheiten vollständig allgemeine Wahrheiten, zu deren Formulierung neben Variablen nur noch das Vokabular benötigt wird, das in allem Reden über jedes Thema vorausgesetzt ist. Nach Frege sind die logischen Gesetze daher ebenso deskriptiver Natur wie die Gesetze der empirischen Wissenschaften (Goldfarb, 2010, S. 68). Eine solche Konzeption ist jedoch nicht mit einer Position zu vereinbaren, der die logischen Wahrheiten als apriorische und notwendige Wahrheiten gelten und die gleichzeitig die Sinneswahrnehmung als die einzige Quelle faktischen Wissens erachtet. Da die Mitglieder des Wiener Kreises gerade eine solche Position verteidigen wollten, brauchten sie also eine überzeugende

Alternative zu Freges Konzeption von Logik und sie fanden eine solche in Wittgensteins Auffassung der logischen Wahrheiten als gehaltleerer Tautologien (Ricketts, 2007, S. 200–201).

Wie inzwischen klar sein sollte, übernahm Carnap im *Versuch* jedoch nicht bloss die Wittgensteinsche Idee, dass die logischen Wahrheiten gehaltleere Tautologien sind. Er übernahm auch die Wittgensteinsche Definition von Tautologizität und Wittgensteins wahrheitsfunktionale Konzeption komplexer Sätze. Zudem übernahm er sogar diejenige Idee des *Tractatus*, dass alle logischen Wahrheiten gleichberechtigt sind (6.127). Der *Versuch* ist daher auch inspiriert von Wittgensteins Theorie der logischen Verknüpftheit von Sätzen: Der *Tractatus* will die logische Verknüpftheit von Sätzen in einer solchen Weise verstehen, dass diese Verknüpftheit den Sätzen intrinsisch ist (Ricketts, 1996a, S. 63–64). Insbesondere entwickelte Wittgenstein eine Theorie der logischen Wahrheit, die jede Bezugnahme vermeidet auf logische Gesetze, die den Übergang von Sätzen zu Sätzen vermitteln. Zudem entwickelte er eine Konzeption von logischer Wahrheit, die keine Unterscheidung zwischen selbstevidenten logischen Axiomen und ihren Folgerungen benötigt (ibid., S. 82–83). Im *Versuch* übernahm Carnap diesen Zugang zur logischen Verknüpftheit von Sätzen und er verwarf insbesondere auch die Idee, dass ein axiomatischer Aufbau der Logik Einsichten in die Natur der logischen Wahrheit liefern kann (Carnap, 1931b, S. 11). Doch während Wittgenstein geltend machte, dass alle Sätze der Logik aus dem Grund gleichberechtigt sind, weil jede Tautologie selbst zeigt, dass sie eine Tautologie ist (6.127), reformulierte Carnap diese Idee in metalogischen Termen und behauptete, dass jede Tautologie „für sich allein (metalogisch) als Tautologie erwiesen werden“ kann (Carnap, 1931b, S. 11). Seine Idee war die, dass ein Satz S dadurch als tautologisch erwiesen werden kann, dass der metalogische Satz ‚S ist tautologisch‘ bewiesen wird und dass dieser metalogische Satz selbst mittels der Satzfestsetzungen für die in S vorkommenden logischen Zeichen bewiesen werden kann (ibid.).

Auch wenn die grundsätzliche Idee, die Wittgensteinschen Erläuterungen als metalogische Definitionen zu reformulieren, im *Versuch* in einigem Detail ausgearbeitet ist, lässt das Manuskript dennoch auch wichtige Fragen offen. Erstens beruhte Carnaps metalogische Version der Logik des *Tractatus* auf der Idee, dass Tautologien metalogisch als tautologisch erwiesen werden können. Damit setzte er eine Hintergrundtheorie voraus, die es erlaubt, Sätze der Form ‚S ist tautologisch‘ aus den Satzfestsetzungen abzuleiten. Die Definitionen der logischen Zeichen allein liefern diese Konsequenzen ja nicht. Es werden logische Hilfsmittel benötigt, um sie aus den Definitionen abzuleiten. Soll eine vollständige Klärung der Natur der Logik erreicht werden, so wäre also auch der Status dieser Hintergrundtheorie zu klären. Da

Carnap jedoch dieses Problem im *Versuch* vollständig ignorierte, gelang es ihm mit seiner metalogischen Theorie der Tautologizität noch nicht, eine umfassende Klärung der Natur der Logik zu liefern.

Zweitens unterliess Carnap es vollständig, den Begriff der Metalogik zu klären oder zu bestimmen, welche Begriffe in der metalogischen Beschreibung einer Sprache überhaupt verwendet werden dürfen. Zudem unterliess er es, sein Projekt gegen grundsätzliche Einwände zu verteidigen, die von einem Wittgensteinschen Standpunkt gegen die Zulässigkeit eines metalogischen Programms gemacht werden können. Insbesondere liess er ein entscheidendes Problem offen: Im *Tractatus* gilt ein Satzzeichen als eine Tatsache (3.14). Da eine Tatsache nur durch die Sprache abgebildet werden kann und nicht benannt werden kann (3.144), muss ein Satz über ein Satzzeichen dieselbe logische Multiplizität wie das Satzzeichen haben (4.04). In seiner Metalogik schien Carnap aber die Möglichkeit von Sätzen über Sätze eines Typs vorauszusetzen, die durch diese Konzeption ausgeschlossen sind, wie etwa der Satz, dass eine Konjunktion zweier Sätze genau dann wahr ist, wenn die beiden Sätze wahr sind. Da Carnap es unterliess zu erklären, weshalb auch metalogische Sätze dieses Typs legitim sein können, liess er also die Frage offen, weshalb seine Metalogik überhaupt als zulässig gelten kann.

Diese Lücke in der Darstellung des *Versuchs* mag vielleicht nicht als ein besonders gravierendes Problem erscheinen. Für Carnap jedoch war dies Anfang 1931 der Fall. Einige Mitglieder des Wiener Kreises nahmen Wittgensteins Verbot von Sätzen über Sätze ernst und Carnap brauchte daher eine Antwort auf die Frage, weshalb seine Metalogik zulässig ist.[49] Ohne eine solche Antwort konnte er nicht hoffen, alle Mitglieder des Wiener Kreises von der Signifikanz seiner metalogischen Version der Logik des *Tractatus* überzeugen zu können. Tatsächlich brauchte er, um den Wittgensteinschen Flügel des Kreises überzeugen zu können, eine Erklärung der Möglichkeit einer Metalogik, die zumindest in einigen grundsätzlichen Punkten in Einklang mit einem Wittgensteinschen Standpunkt ist.

Es erstaunt daher nicht, dass Carnap sich bereits wenige Wochen nach der Niederschrift des *Versuchs* dem Problem zuwandte, den Status seines metalogischen Programms zu klären. Zudem glaubte er bereits im Sommer 1931, dass er dieses Problem gelöst habe, und zwar in einer Weise, die nicht im Widerspruch zu Wittgensteins Standpunkt steht. Seine Lösung basierte auf der Idee, dass die Metalogik als eine Theorie verstanden werden kann, die Eigenschaften von Sequenzen konkreter Schriftzeichen zu ihrem Gegenstand hat. Carnap

[49] Waismann verwarf zum Beispiel explizit die Möglichkeit von Aussagen über Aussagen in einer Diskussion des Wiener Kreises am 7. Mai 1931. Zusätzlich machte Carnap in seiner Antwort auf Waismanns Bemerkung folgendes geltend: „Ich werde in meiner Metalogik erklären, in welchem Sinne Sätze über Sätze möglich sind“ (Stadler, 1997, S. 304).

entwickelte diese Konzeption in zwei Schritten: Zunächst unterwarf er das in der Metalogik zulässige Vokabular der Restriktion, dass einzig solche Terme zulässig sind, die mit ausschliesslicher Bezugnahme auf syntaktische Eigenschaften von Zeichenreihen definiert sind. In einem zweiten Schritt kombinierte er diesen Zugang mit der Idee, dass die primitiven Begriffe der Metalogik ein Mittel sind, um physikalische Schriftgebilde auf Grund ihrer Gestalt zu unterscheiden.

In den folgenden zwei Kapiteln 3.2–3.3 werde ich diese zwei Schritte im Detail diskutieren. Um Carnaps intellektuelle Entwicklung zu verstehen, ist es entscheidend zu beachten, dass die Idee, Sprachen als syntaktisch spezifizierte Kalküle zu behandeln, im *Versuch* noch vollständig fehlte: Carnap auferlegte dem zulässigen metalogischen Vokabular keine offenkundigen Restriktionen und insbesondere beschränkte er dieses Vokabular noch nicht auf syntaktische Terme: Die Konstruktion der eigentlichen Sprache beruhte auf der Voraussetzung, dass der Wahrheitsbegriff ein Grundbegriff der Metalogik ist (Carnap, 1931b, S. 3), und ausgehend von dieser Voraussetzung entwickelte Carnap ein Vokabular, das demjenigen vergleichbar ist, das wir heutzutage verwenden, um die semantischen Eigenschaften einfacher formaler Sprachen zu diskutieren.

Eine Sprache als einen Kalkül zu behandeln, heisst zusätzlich, sie als ein System von Transformationsregeln zu behandeln und geltend zu machen, dass die Bedeutung der Zeichen durch diese Transformationsregeln determiniert ist (Carnap, 1934a, S. V). Im *Versuch* jedoch werden die logischen Zeichen durch semantische Festsetzungen eingeführt und Transformationsregeln werden im Anschluss daran als überflüssig erwiesen. Es ist richtig, dass Carnap in einem Brief an Neurath vom 23. Dezember 1933 bemerkte, dass seine Syntax historisch zwei Wurzeln hat, Wittgenstein und die Metamathematik (Carnap, 1933). Diese Bemerkung sollte aber dennoch nicht so verstanden werden, dass sie impliziert, dass bereits der *Versuch* eine Konzeption von Sprachen als Kalküle enthält. Dieses Manuskript ist von der Metamathematik beeinflusst, weil es eine Unterscheidung zwischen Logik und Metalogik enthält, doch diese Unterscheidung ist noch nicht mit der Idee verknüpft, dass die Metalogik einen Kalkül zu ihrem Gegenstand hat.

3.2 Das Manuskript *Einführung in die wissenschaftliche Philosophie*

Wenige Wochen nachdem Carnap den *Versuch* niedergeschrieben hatte, gelangte er zu der Überzeugung, dass der Begriff der Wahrheit in der Metalogik nicht verwendet werden darf (Carus, 2007, S. 235). In der Konsequenz hatte er den gesamten Ansatz des *Versuchs* zu verwerfen: Darf der Wahrheitsbegriff in der Metalogik nicht verwendet werden, so können die Erläuterungen des *Tractatus* nicht zum Ausgangspunkt genommen werden, um die logische Sprache metalogisch zu beschreiben.

Ende Februar 1931 begann Carnap damit, an einem Manuskript zu arbeiten, das den Titel *Einführung in die wissenschaftliche Philosophie* trug (ibid., S. 234). In diesem Manuskript entwickelte er einen neuen Ansatz: Er behauptete nun, dass sich die logische Sprache als ein Regelsystem behandeln lässt, ohne dass in der Formulierung dieser Regeln in irgendeiner Weise auf die Bedeutung von Ausdrücken Bezug genommen wird (Carnap, 1931c, S. 69).[50] Zusätzlich begann er damit, seine Metalogik als die Theorie zu verstehen, in der diese Regeln aufgestellt und untersucht werden (ibid., S. 17–18). Er setzte also nicht mehr länger einfach eine Unterscheidung zwischen Logik und Metalogik voraus, vielmehr identifizierte er sie nun mit der Unterscheidung zwischen der Logik und der Theorie, in der die logische Sprache als Kalkül behandelt wird. Schliesslich präzisierte er auch die Idee des *Versuchs*, dass unter Verwendung metalogischer Terme eine präzise Konstruktion der Logik gegeben werden kann, und behauptete, dass Präzision im Reden über Logik zu erreichen ist, indem das metalogische Vokabular auf Terme beschränkt wird, die ausschliesslich syntaktische Eigenschaften von Zeichenreihen beschreiben.

Da Carnap damit begann, die logische Sprache als einen Kalkül zu behandeln, musste er die Wittgensteinschen Begriffe, die er im *Versuch* zur Beschreibung seiner eigentlichen Sprache eingeführt hatte, durch syntaktische Begriffe ersetzen. Dies aber bedeutet keineswegs, dass er jene inhaltlichen Begriffe nun vollständig verwarf. Im Manuskript *Einführung in die wissenschaftliche Philosophie* galt ihm ein Zugang zu logischen Fragen, der auf einer kalkülmässigen Behandlung der logischen Sprache aufbaut, noch immer als eine beschränkte Betrachtungsweise. So bemerkte er etwa im Mai 1931 im Wiener Kreis: „Wir sollten in der Logik die Worte ‚wahr' und ‚falsch' lieber beibehalten. Wir müssen doch auf den Unterschied zwischen einem bloß formalen Kalkül und der Logik achten" (Stadler, 1997, S. 304).

Es besteht also eine Differenz zwischen der Logik und „einem bloß formalen Kalkül" und, wie die Metamathematik die Theorie der formalisierten mathematischen Disziplinen ist, so sollte auch die Metalogik nicht ein beliebiges formales System zu ihrem Gegenstand haben, sondern eine Theorie der als Kalkül behandelten logischen Sprache sein. Die Regeln, die in der Metalogik zu beschreiben sind, sind daher auch nicht willkürliche Festsetzungen,

[50] Die Sprache, die Carnap im Manuskript *Einführung in die wissenschaftliche Philosophie* konstruierte, unterschied sich in verschiedenen Hinsichten von der späteren Sprache I: Der eingeführte Funktionenkalkül gestattete unbeschränkte All- und Existenzquantifikationen. Zudem liess er auch variable Funktoren zu (Carnap 1931c, S. 69–70).

vielmehr ist ihre Wahl durch die Forderung bestimmt, dass die Metalogik eine Theorie der Logik sein soll.

Allerdings unterscheidet sich die Logik von einem beliebigen Kalkül einzig darin, dass ihre gültigen Sätze notwendige Wahrheiten sind und ihre Umformungsregeln solcherart, dass sie von wahren Sätzen stets wieder zu wahren Sätzen führen. Auch wenn Carnap also den Wittgensteinschen Begriff der Tautologie aus der Metalogik verbannte und durch einen syntaktischen Begriff der Beweisbarkeit ersetzte, verwarf er den inhaltlichen Begriff dennoch keineswegs vollständig. Im Manuskript *Einführung in die wissenschaftliche Philosophie* benötigte er ihn, um die logische Sprache von einem beliebigen formalen Kalkül abgrenzen zu können: Carnap charakterisierte die Tautologien als diejenigen Sätze, die unter allen zulässigen Interpretationen ihrer Variablen wahr sind (Carnap, 1931c, S. 80), und er forderte vom metalogisch zu konstruierenden Kalkül, dass in ihm genau die Formeln beweisbar sind, die den tautologischen Sätzen entsprechen (ibid., S. 80–81).

3.3 Die Referate über Metalogik

Im Juni 1931 hielt Carnap im Wiener Kreis drei Referate, in denen er seine Metalogik zum ersten Mal einem breiteren Publikum präsentierte.[51] Er charakterisierte die Metalogik als „die Theorie der Formen, die in einer Sprache auftreten", und er forderte, dass in dieser Theorie nicht auf die Bedeutung der Zeichen und Ausdrücke Bezug genommen wird (Stadler, 1997, S. 314). Dann illustrierte er seine Metalogik, indem er eine Modellsprache konstruierte sowie zwei metalogische Sprachen zur Beschreibung dieser Modellsprache.

Die Modellsprache, die Carnap präsentierte, ist der Sprache I der *Logischen Syntax* vergleichbar. Insbesondere ist sie eine Koordinatensprache desselben Typs wie I: Das von ihr behandelte Gebiet ist eine eindimensionale Reihe mit einem Anfangsglied und einer ausgezeichneten Richtung und sie verwendet Zahlausdrücke, um die Stellen in dieser Reihe zu bezeichnen (Carnap, 1934a, S. 11–13; Stadler, 1997, S. 314–315). Zudem hat die Modellsprache die folgenden Eigenschaften mit der Sprache I gemeinsam: 1.) In ihr kommen nur beschränkte Quantoren vor, freie Variablen werden verwendet, um unbeschränkte Allgemeinheit auszudrücken (Carnap, 1934a, S. 19–21; Stadler, 1997, S. 314–315). 2.) Das System der Grundsätze und Ableitungsregeln, das ihre Methode der Deduktion definiert, enthält auch arithmetische Grundsätze und arithmetische Umformungsregeln (Carnap, 1934a, §§10–14; Stadler, 1997, S. 321–323).

[51] Carnap hielt diese drei Referate zwischen dem 11. Juni und dem 25. Juni 1931. In der Sitzung vom 2. Juli diskutierten die Mitglieder des Wiener Kreises noch einmal über Carnaps Metalogik. Die Referate und die Diskussion sind abgedruckt in (Stadler, 1997, S. 314–334).

Zudem bestehen sogar Parallelen zwischen den Referaten und der Präsentation der Sprache I in der *Logischen Syntax*. Auch in den Referaten konstruierte Carnap zunächst eine informale metalogische Sprache: Er führte metalogische Namen für Arten von Zeichen und ein Zeichen für die Operation der Verkettung ein (Stadler, 1997, S. 315–316). Dann definierte er metalogische Namen für andere Arten von Ausdrücken mittels dieser metalogischen Zeichen und Ausdrücken der deutschen Sprache (ibid., S. 317–320). In seinem dritten Referat ersetzte er diese informale metalogische Sprache durch die Modellsprache selbst[52] und formulierte also die Metalogik der Modellsprache in dieser Sprache. Zudem bediente er sich in diesem Zusammenhang der Methode der Arithmetisierung (ibid., S. 326–327).[53]

Allerdings sind die Ähnlichkeiten, die zwischen der Position, die Carnap in den Referaten vertrat, und derjenigen, die sich dann in der *Logischen Syntax* findet, grösstenteils oberflächlicher Natur. Wie ich im Folgenden zeigen werde, unterscheidet sich die Konzeption von Metalogik, die Carnap im Juni 1931 entwickelte, in verschiedenen Hinsichten von seiner späteren Konzeption von Syntax. Ausserdem besitzt die Sprache I in der *Logischen Syntax* lediglich den Status einer Beispielsprache und dies galt für die Modellsprache der Referate noch nicht.

Ich habe in Kapitel 3.2 diskutiert, wie Carnap mit der Gleichsetzung seiner Metalogik mit der Theorie der kalkülmässig konstruierten logischen Sprache einen Schritt hin zu einer Klärung der Natur der Metalogik machte. Die Behauptung allein, dass sich alle logischen Eigenschaften syntaktisch definieren lassen, erklärt jedoch noch nicht, wie über diese Eigenschaften gesprochen werden kann, und sie beantwortet keine Wittgensteinschen Einwände gegen die Zulässigkeit eines metalogischen Projekts. Wittgenstein hatte ja im *Tractatus* auch behauptet, dass sich die logische Syntax aufstellen lassen muss, „ohne dass dabei von der Bedeutung eines Zeichens die Rede wäre“ (3.33). Dennoch bestritt er, zumindest Carnaps Ansicht nach, dass es eine „aussprechbare Syntax“ geben kann (Carnap, 1934a, S. 208).

In seinen Referaten über Metalogik versuchte Carnap explizit, solche Einwände gegen sein Projekt zu entkräften. Schon zu Beginn seines ersten Referates fragte er: „Gibt es Sätze über Sätze, welchen Sinn haben sie, sind es empirische Sätze oder Tautologien, ergibt sich eine Hierarchie der Sprachen?“ (ibid., S. 314). Und um diese Fragen zu beantworten, versuchte er zu zeigen, dass sich die Metalogik als eine Theorie physikalischer Gebilde verstehen lässt und

[52] So bemerkte Carnap zu Beginn seines dritten Referates: „Eine Formel ist eine eindimensionale Reihe discreter Dinge verschiedener Arten, also ein Gebilde, wie wir es in unserer Sprache beschreiben können“ (Stadler, 1997, S. 325).
[53] Auch in der *Logischen Syntax* bediente sich Carnap zunächst bei der Konstruktion der Sprache I einer solchen informalen Syntaxsprache (Carnap, 1934a, §§ 3–14). Im Anschluss daran formulierte er die Syntax von I mittels der Methode der Arithmetisierung in der Sprache I (ibid., §§ 18–23).

dass daher die Möglichkeit von Sätzen über logische Eigenschaften nicht im Widerspruch zu Wittgensteins These steht, dass es keine Sätze über Sätze geben kann.

Auch wenn Carnap diese physikalistische Konzeption von Metalogik in seinen Referaten nicht im Detail entwickelte, ist es dennoch klar, dass er seine metalogische Sprache in der folgenden Weise konstruieren wollte:[54] Zuerst werden die grundlegenden Symboltypen der zu beschreibenden Sprache als undefinierte Grundzeichen in die Modellsprache eingeführt. Diese primitiven Terme beziehen sich auf Stellen und jeder von ihnen trifft auf genau die Stellen zu, an denen konkrete Schriftzeichen einer bestimmten Gestalt stehen. Diese Terme sind daher physikalische Terme und sie sind ein Mittel, um Inskriptionen auf der Grundlage ihrer Gestalt zu unterscheiden. Da der Gegenstandsbereich der Modellsprache eine Reihe mit einer ausgezeichneten Richtung ist, kann die Operation der Verkettung mittels der Nachfolgerrelation ausgedrückt werden. Dass zum Beispiel ein Ausdruck aus einer linken Klammer besteht, gefolgt von einem Nullzeichen, kann durch die Behauptung ausgedrückt werden, dass an einer gewissen Stelle ein linkes Klammerzeichen steht und an der nächsten Stelle ein Nullzeichen. Weitere metalogische Terme werden dann in diese metalogische Sprache mittels Definitionen eingeführt und diese Definitionen bedienen sich einzig des logisch-mathematischen Vokabulars der Modellsprache, Variablen, deren Werte Stellen sind, und des primitiven metalogischen Vokabulars.

Gemäss dieser Konzeption ist die metalogische Sprache also eine Teilsprache der Modellsprache und die metalogischen Begriffe dienen dazu, Sequenzen konkreter Schriftzeichen auf der Grundlage der Gestalt dieser Zeichen zu beschreiben. Doch welchen Status haben dann die metalogischen Sätze? Zum Teil sind diese Sätze empirischer Natur. Dies gilt zum Beispiel für solche Sätze, in denen ein metalogisches Prädikat einer gegebenen Inskription zugeschrieben wird. Zum Teil sind diese metalogischen Sätze aber auch analytische Konsequenzen der metalogischen Definitionen. Dies gilt insbesondere für Konditionale der Form, dass eine Inskription, die durch einen gewissen metalogischen Term beschreibbar ist, auch durch andere metalogische Terme beschrieben werden kann (ibid., S. 316–317). Ein Beispiel für einen solchen Satz ist ‚Wenn an der Stelle x ein Prädikat steht, an der Stelle x+1 ein linkes Klammerzeichen, an der Stelle x+2 ein Nullzeichen und an der Stelle x+3 schliesslich ein rechtes Klammerzeichen, so ist die Inskription, die an den Stellen x bis x+3 steht, eine elementare Formel‘. Dieser metalogische Satz ist analytisch, und zwar aus dem Grund, weil er eine Konsequenz der Definition von ‚elementare Formel‘ ist (ibid., S. 326).

[54] In der folgenden Diskussion konzentriere ich mich auf die formalere metalogische Sprache, die Carnap in seinem dritten Referat einführte. Meine Bemerkungen gelten aber in leicht modifizierter Form auch für die informale metalogische Sprache, der sich Carnap in den ersten beiden Referaten bediente.

Carnaps Diskussion der Methode der Arithmetisierung bestätigt, dass er in seinen Referaten eine solche Konzeption von Metalogik verteidigte. In der *Logischen Syntax* wird diese Methode verwendet, um einen Teil der Syntax der Sprache I in der Sprache I zu formulieren (Carnap, 1934a, §§ 18–19). In seinen Referaten bediente sich Carnap jedoch dieser Methode nicht, um die Metalogik in der Modellsprache auszudrücken. Stattdessen bediente er sich ihr, um „merkwürdige Schwierigkeiten" zu lösen, mit denen er sich bei seinem Versuch konfrontiert sah, das Prädikat ‚S ist beweisbar mit einem Beweis von so und so vielen Zeichen' zu definieren (Stadler, 1997, S. 324).[55]

Diese „merkwürdigen Schwierigkeiten" resultieren daraus, dass gemäss einer physikalistischen Konzeption die Zuschreibung eines metalogischen Prädikates zu einem Ausdruck Behauptungen über die Existenz konkreter Schriftzeichen implizieren kann: Ein metalogisches Prädikat kann durch einen Ausdruck definiert werden, der einen Existenzquantor enthält, und metalogische Sätze, die Existenzquantoren enthalten, besagen, dass es gewisse Stellen gibt, die durch eine Reihe von konkreten Schriftzeichen einer bestimmten Gestalt belegt sind. Wie Carnap selbst bemerkte, führt die Tatsache, dass seine Definitionen Existenzimplikationen haben können, nicht notwendigerweise zu Schwierigkeiten. In gewissen Fällen betreffen diese Existenzimplikationen lediglich Teilstücke des metalogisch beschriebenen Ausdrucks und sie werden daher durch die Existenz des Ausdrucks selbst trivialerweise verifiziert (ibid., S. 324).

Wie Carnap auch bemerkte, gilt dies aber im Falle des Begriffs der Beweisbarkeit nicht: Die Formeln, die einen Beweis einer Formel S bilden, sind im Allgemeinen nicht Teilformeln von S. Daher muss das Prädikat ‚S ist beweisbar mit einem Beweis bestehend aus so und so vielen Zeichen' unterschieden werden vom Prädikat ‚es gibt Formeln, die einen Beweis von S bestehend aus so und so vielen Zeichen bilden'. Würde das erste Prädikat mit dem zweiten gleichgesetzt, so würde dies ja die absurde Konsequenz nach sich ziehen, dass die „empirische Beschaffenheit der übrigen Dinge der Welt" darüber entscheidet, ob eine Formel beweisbar ist oder nicht (ibid., S. 325).

Doch wie kann Beweisbarkeit dann definiert werden? Carnaps Antwort auf diese Frage basierte auf der Idee, dass die Methode der Arithmetisierung es einem erlaubt, die kombinatorische Theorie, die in der Arithmetik vorliegt, als ein Hilfsmittel zu verwenden, um eine Theorie möglicher Zeichensequenzen zu formulieren. Die Arithmetisierung erlaubt es einem also, ‚ist beweisbar' zu verstehen als ‚ein Beweis ist möglich'. Um eine solche Theorie

[55] Da die metalogische Sprache Teil der Modellsprache ist, können unbeschränkte Existenzsätze in ihr nicht ausgedrückt werden. Daher lässt sich auch der Begriff der Beweisbarkeit in ihr nicht definieren. Es erstaunt aus diesem Grund nicht, dass Carnap in seinen Referaten nur Begriffe der Form ‚beweisbar mit einem Beweis von n Zeichen' als zulässig erachtete: „Was heißt beweisbar? Ohne Beschränkung der Länge des Beweises ist dies kein korrekter Begriff" (Stadler, 1997, S. 324).

möglicher Zeichensequenzen zu konstruieren, führte Carnap in seine metalogische Sprache einen empirischen Funktor ein, der Stellen Zahlen zuordnet, und zwar in einer solchen Weise, dass die einer Stelle zugeordnete Zahl die Gestalt des Zeichens, das die Stelle belegt, eindeutig determiniert.[56] Mit der Hilfe dieses Funktors wollte er dann aus den von Gödel definierten metamathematischen Begriffen metalogische Begriffe ableiten, die sich auf Sequenzen konkreter Schriftzeichen beziehen. Insbesondere wollte er in dieser Weise aus dem entsprechenden arithmetischen Begriff einen metalogischen Begriff ableiten, der auf genau die Sequenzen von Stellen zutrifft, an denen eine Formel steht, die mit einem Beweis von so und so vielen Zeichen beweisbar ist (ibid., S. 325–327).

Es ist entscheidend zu sehen, welche Rolle Gödels arithmetisierte Begriffe in Carnaps Metalogik genau spielten: Die metalogischen Begriffe dienen dazu, Sequenzen konkreter Schriftzeichen zu beschreiben. Gödels Begriffe, die zur Arithmetik gehören und die sich auf Zahlen beziehen, sind daher von den genuin metalogischen Begriffen zu unterscheiden (ibid., S. 327). Diese arithmetisierten Begriffe sind blosse Hilfsbegriffe und ein empirischer Funktor wird benötigt, um metalogische Begriffe aus ihnen ableiten zu können.

Wie bereits erwähnt, bestand die philosophische Signifikanz dieser physikalistischen Konzeption von Metalogik darin, dass Carnap glaubte, auf ihrer Grundlage die Wittgensteinschen Einwände gegen sein metalogisches Projekt beantworten zu können: Er glaubte, dass diese Konzeption es ihm erlaubte einerseits zu behaupten, dass es möglich ist, über Logik zu sprechen, und andererseits auch zu behaupten, dass Wittgenstein zu Recht Sätze über Sätze verworfen hatte.

So glaubte Carnap also einerseits, dass er Wittgensteins These widerlegt habe, dass die logischen Eigenschaften von Sätzen nicht durch die Sprache ausgedrückt werden können: Es kann nicht bestritten werden, dass über Reihen sprachlicher Zeichen gesprochen werden kann, wenn Zeichen als physikalische Objekte aufgefasst werden, von denen nichts anderes vorausgesetzt wird, als dass sie auf Grund ihrer Gestalt unterschieden werden können. Und da „mit Hilfe dieser physikalischen Beschreibungen der Formeln alle Fragen der Syntax, die wir hier im Zirkel besprechen, behandelt werden können" (ibid., S. 329), ist gezeigt, dass alle logischen oder syntaktischen Fragen in vollständig präziser Weise diskutiert werden können.

---

[56] In der *Logischen Syntax* findet sich eine ausgearbeitete Version dieser Idee: Zunächst werden den Zeichen zum Teil willkürlich, zum Teil gemäss gewissen Regeln Zahlen zugeordnet. Dann wird ein empirischer Funktor σ definiert, und zwar so, dass $\sigma(x)$ die Zahl ist, die dem Zeichen zugeordnet ist, das an der Stelle x steht. Schliesslich wird ein empirischer Funktor τ definiert, der Stellenreihen Zahlen zuordnet, und zwar so, dass ‚$\tau(x, k)=n$' besagt, dass an der Stellenreihe x bis x+k ein Ausdruck steht mit: $\sigma(x)$ ist die Multiplizität des ersten Primfaktors von n, ... , $\sigma(x + k)$ ist die Multiplizität des k+1-ten Primfaktors von n. Nun kann wie folgt aus einem arithmetisierten Prädikat f ein empirisches abgeleitet werden: Das empirische Prädikat soll genau dann auf den Ausdruck zutreffen, der an den Stellen x bis x+k steht, wenn $f(\tau(x, k))$ (Carnap, 1934a, § 24).

Andererseits behauptete Carnap aber auch, dass Wittgenstein zu Recht die Möglichkeit von Sätzen über Sätze bestritten hatte:

> Da wir nur physikalische Gebilde, nämlich Reihen von Sprachzeichen, beschreiben, können wir die Metalogik in unserer gewöhnlichen Sprache ausdrücken, *und zwar so, daß dies den Ansichten Wittgensteins nicht widerspricht.* Es handelt sich hier nicht um Sätze über eine Art von Sätzen, sondern um teils singuläre, teils konditionale Sätze über physikalische Gebilde. (Stadler 1997, S. 327; Hervorhebung von mir)

Carnaps Lösung des Problems des Sprechens über Logik und seine Kritik an Wittgenstein bestand also nicht in der These, dass der *Tractatus* eine gewisse Art von Sätzen fälschlicherweise als unzulässig hinstellte. Sie bestand einzig in der These, dass in der Metalogik lediglich von konkreten Inskriptionen gesprochen werden muss.[57]

Zusätzlich verteidigte Carnap in diesen Referaten auch eine universalistische Idee, die von Frege, Russell und Wittgenstein artikuliert wurde, und zwar die Idee der einen allumfassenden Sprache. Tatsächlich ist ja die These, dass die metalogischen Sätze zu derselben Sprache gehören wie die anderen Sätze eine unmittelbare Konsequenz von Carnaps Konzeption: Da die primitiven Begriffe der Metalogik ein Mittel sind, um Schriftzeichen auf Grund ihrer Gestalt zu unterscheiden, sind diese Begriffe nicht grundsätzlich verschieden von den anderen Begriffen der physikalischen Sprache und lassen sich auch in dieser Sprache ausdrücken (ibid., S. 329). In seinen Referaten verteidigte Carnap also nicht nur die These, dass sich ein Teil der Syntax einer Sprache in dieser Sprache selbst formulieren lässt. Er verteidigte sogar die stärkere These, dass alle Sätze, auch die metalogischen, zu einer einzigen Sprache gehören (ibid.). Und während die Methode der Arithmetisierung in der *Logischen Syntax* verwendet wird, verwarf Carnap im Juni 1931 die Idee einer Hierarchie von Sprachen auf Grund seiner Konstruktion der metalogischen Sprache als einer Teilsprache der Sprache der Physik. Insbesondere führte er nicht – wie Awodey und Carus geltend machen (Awodey & Carus, 2007, S. 35) – zunächst eine solche Hierarchie ein und musste sich dann der

[57] Die Tatsache, dass Carnap in seinen Referaten über Metalogik zu zeigen versuchte, dass seine Metalogik Wittgensteinschen Ideen nicht widerspricht, hat in der Literatur bereits eine gewisse Beachtung gefunden (Gálvez, 1997; Oberdan, 1992; Proust, 1987). Es ist zu beachten, das es höchst fragwürdig ist, ob es Carnap tatsächlich gelang zu zeigen, dass es auch im Rahmen einer Wittgensteinschen Konzeption zulässig sein kann, über die logischen Eigenschaften von Sätzen zu sprechen. So hat zum Beispiel Friedman dafür argumentiert, dass es Carnap in der *Logischen Syntax* mit seiner Erklärung der Möglichkeit syntaktischer Sätze nicht gelang, dieses Ziel zu erreichen: „When the *Tractatus* denies that logical syntax is expressible ..., it of course does not intend to deny that one can formulate a combinatorial theory of strings of symbols. But, from the point of view of the *Tractatus*, this would simply be a particular theory formulated within a more comprehensive language – a language that embodies and presupposes logical form and logical syntax in precisely the sense of the *Tractatus*“ (Friedman, 1997, S. 33–34).

Methode der Arithmetisierung bedienen, um seine Metalogik in der Objektsprache ausdrücken zu können.

Dieser physikalistische Zugang löste also das Problem, wie über Logik gesprochen werden kann. Doch Carnap glaubte, dass er auch das zweite Problem löst, das im *Versuch* offenblieb: das Problem des Status der Hintergrundtheorie, die notwendig ist, um Theoreme aus den metalogischen Definitionen ableiten zu können. Auch in seinen Referaten setzte er eine solche Hintergrundtheorie voraus. Obwohl er diese Voraussetzung oder die logisch-mathematischen Mittel, die in dieser Theorie benötigt werden, nicht explizit diskutierte, zeigt eine Bemerkung, die er am Ende seines dritten Referates machte, dennoch, dass er glaubte, dass diese Theorie kein echtes Problem für seine Konzeption darstellt: In einer Antwort auf eine Frage von Neurath führte er aus, dass „die Metalogik der Metalogik" auch wieder in der ursprünglichen Sprache ausgedrückt werden kann (Stadler, 1997, S. 329).

Es gibt eine weitere Frage, die hier diskutiert werden muss: Welchen Status schrieb Carnap seiner Modellsprache zu? Galt ihm diese Sprache als eine universelle Sprache der Wissenschaft oder lediglich als eine Mustersprache, an der die metalogischen Methoden illustriert werden können? Von vornherein mag es sogar unplausibel erscheinen, dass Carnap seine Modellsprache als eine erste und vereinfachte Version einer idealen Wissenschaftssprache erachtete: Es bestehen keine Zweifel daran, dass er von der gesuchten idealen Sprache forderte, dass sie eine Theorie der reellen Zahlen enthält, die den Gesetzen der klassischen Analysis genügt. Die mathematischen Ressourcen der Modellsprache scheinen allerdings beschränkt zu sein auf diejenigen der elementaren Arithmetik.

Es ist zwar durchaus richtig, dass Carnap in seinen Referaten einzig die natürlichen Zahlen diskutierte. Dies zeigt aber nicht, dass er glaubte, dass die mathematischen Ressourcen seiner Sprache auf diejenigen der Arithmetik beschränkt sind. Bemerkungen, die er am 2. Juli im Wiener Kreis machte, zeigen deutlich, dass er glaubte, auch die reellen Zahlen im Rahmen der Modellsprache konstruieren zu können. Zwar verwies er darauf, dass er die Details noch nicht ausgearbeitet habe, er behauptete aber dennoch, dass die reellen Zahlen in irgendeiner Weise, eventuell unter Hinzunahme weiterer Axiome, metalogisch in die Modellsprache eingeführt werden können, und zwar dadurch, dass sie mit Ausdrücken einer bestimmten Art identifiziert werden (ibid., S. 333–334).

Die Tatsache, dass Carnap in seinen Referaten einzig eine Theorie der natürlichen Zahlen konstruierte, zeigt daher nicht, dass ihm seine Modellsprache lediglich als eine Beispielsprache galt. Sie zeigt lediglich, dass er eine vereinfachte Sprache präsentierte und dass er sich in seiner Präsentation auf diejenigen Probleme beschränkte, auf die er bereits eine Antwort gefunden hatte, die ihn selbst zufrieden stellte. Ausserdem liefert die Tatsache, dass er glaubte, eine Theorie der reellen Zahlen in seiner Modellsprache konstruieren zu können, ein deutliches Argument für die Behauptung, dass er diese Sprache als eine vereinfachte und vorläufige Version der gesuchten idealen Wissenschaftssprache erachtete. Und meines Erachtens ist diese Behauptung korrekt: Mit seiner Modellsprache glaubte Carnap, den logischen Kern einer idealen Wissenschaftssprache präsentiert zu haben.[58]

Es gibt einen weiteren möglichen Einwand gegen die eben aufgestellte Behauptung: Während die Sprache I zwei verschiedene Typen von Transformationsregeln besitzt, Ableitungsregeln und Folgeregeln (Carnap, 1934a, §§ 10–14), besitzt die Modellsprache der Referate nur Regeln des ersten Typs.[59] Diese Sprache ist daher unvollständig und Carnap war sich dessen sehr wohl bewusst: In seinem dritten Referat bemerkte er, dass mittels „Gödels Methode" unentscheidbare arithmetische Sätze in seiner Sprache konstruiert werden können (Stadler, 1997, S. 328–329). Carnap wusste somit, dass es ihm sein Deduktionssystem nicht erlaubte, einen metalogischen Ersatz zu definieren für ein bivalentes Wahrheitsprädikat für die arithmetischen Sätze seiner Modellsprache. Nun könnte man behaupten, dass die Definition eines solchen Ersatzes absolut zentral war für Carnaps Projekt. Es scheint, dass er ohne eine solche Definition die Kernthese seiner Philosophie der Mathematik nicht verteidigen konnte: die These, dass die Mathematik aus dem Grund ein reines begriffliches Hilfsmittel ist, weil sie analytisch ist. Wie also konnte er dann glauben, dass das logische System, das er präsentiert hatte, zufriedenstellend ist?

Meines Erachtens galt Carnap die Mathematik zu dieser Zeit nicht als analytisch. Vielmehr glaubte er, die These, dass die Mathematik ein reines Hilfsmittel für die empirischen Wissenschaften ist, verteidigen zu können, indem er sich Ideen bediente, die sich in Wittgensteins *Tractatus* finden: Gemäss Wittgenstein sind die Sätze der Mathematik Gleichungen. Im Unterschied zu den Tautologien der Logik sind Gleichungen Scheinsätze (6.2), die keine Elemente der wahrheitsfunktionalen Sprache des *Tractatus* sind. Die einzige

---

[58] In diesem Punkt stimmt meine Darstellung mit derjenigen von Awodey und Carus überein. Sie betonen auch, dass Carnap glaubte, mit der Konstruktion der Modellsprache einen ersten Schritt hin zur gesuchten idealen Wissenschaftssprache gemacht zu haben (Awodey & Carus, 2007, S. 38, Fussnote 27).

[59] In der *Logischen Syntax* führte Carnap eine allgemeine Unterscheidung ein zwischen den Folgebestimmungen und den Ableitungsbestimmungen einer Sprache (Carnap, 1934a, §§ 47–48). Für das Folgende ist es nicht entscheidend, wie Carnap genau versuchte, diese Unterscheidung zu formulieren. Wichtig ist allein, weshalb er diese Unterscheidung einführte. In der *Logischen Syntax* machte Carnap geltend, dass sich der Begriff der mathematischen Wahrheit auch für Sprachen, die die Peano-Arithmetik enthalten, rein syntaktisch definieren lässt. Wenn der Begriff der Beweisbarkeit auf der Grundlage eines Deduktionsverfahrens eines bestimmten Typs definiert wird, so zeigt jedoch Gödels Unvollständigkeitssatz, dass in solchen Sprachen der Begriff der mathematischen Wahrheit nicht mit dem Begriff der Beweisbarkeit gleichgesetzt werden kann. Allerdings ist es möglich, auch für solche Sprache Transformationsregeln aufzustellen, die zu einer vollständigen Zweiteilung der logisch-mathematischen Wahrheiten führen. Zu diesen Transformationsregeln müssen dann aber Regeln gehören, die wesentlich stärker sind als diejenigen, die sich mit Gödels Satz als unvollständig erweisen lassen. Daher führte Carnap seine Unterscheidung ein zwischen zwei Deduktionsverfahren: Während die Ableitungsbestimmungen es im Allgemeinen nicht erlauben, den Begriff der mathematischen Wahrheit syntaktisch zu definieren, ist dies mittels der Folgebestimmungen der Fall (Ricketts, 2007, S. 213–214).

Verwendung, die sie haben, ist diejenige eines Hilfsmittels, um Sätze, die nicht zur Mathematik gehören, aus Sätzen abzuleiten, die ebenfalls nicht zur Mathematik gehören (6.211).

In seinen Referaten versuchte Carnap diese Ideen umzusetzen, indem er die Arithmetik als einen Kalkül von Gleichungen verstand, der auf eine deskriptive Sprache aufgepfropft wird: Er führte das Identitätszeichen nicht als ein Zeichen ein, das dazu dient, eigentliche Formeln zu bilden. Vielmehr interpretierte er eine Gleichung als eine Hilfsformel, die in der Sprache einzig als „unselbständiger Bestandteil eines Satzes oder als Glied eines Beweises auftritt" (Stadler, 1997, S. 318). Zusätzlich bestehen alle arithmetischen Sätze der Modellsprache aus Zahlausdrücken, dem logischen Vokabular der Modellsprache und dem Identitätszeichen. Alle diese Sätze sind daher reine Hilfsformeln, die gemäss gegebenen Regeln in Ableitungen von empirischen Sätzen aus empirischen Sätzen gehandhabt werden können.[60]

Auch wenn Carnap in seinen Referaten, das Ziel „einer Begründung der Arithmetik der natürlichen Zahlen" verfolgte (ibid., S. 333), und auch wenn er die Mathematik als ein reines begriffliches Hilfsmittel erachtete, stützte er diese Thesen nicht, wie später in der *Logischen Syntax*, auf die Behauptung, dass die Mathematik analytisch ist. Tatsächlich erwähnte er das Problem, mathematische Wahrheit metalogisch zu definieren, mit keinem Wort. Vielmehr entwickelte er eine Konzeption, gemäss der die arithmetischen Sätze Hilfsformeln sind, nicht weil sie analytisch sind, sondern weil sie Quasiformeln sind, die nur vermittelnde Elemente von Derivationen sind.[61]

Die These, die ich in den vorhergehenden Paragraphen vertreten habe – die These, dass Carnap seine Modellsprache als eine vereinfachte Version einer idealen Wissenschaftssprache erachtete – hat eine entscheidende Konsequenz. Zu Beginn seines ersten Referates formulierte Carnap drei Forderung an die Syntax, die die zu konstruierende Sprache erfüllen soll, und es ist auf diese drei Forderungen zurückzuführen, dass die Modellsprache einige ihrer charakteristischen Eigenschaften aufweist: Da Carnap erstens forderte, dass die Syntax uns dazu zwingen soll, für jeden quantifizierten Satz ein endliches Gebiet anzugeben, auf den sich der Satz bezieht, und da er zweitens forderte, dass ein syntaktischer Unterschied zwischen

---

[60] Es gibt weitere Belege dafür, dass Carnaps primäres Ziel in der ersten Hälfte von 1931 nicht darin bestand, ein vollständiges Deduktionssystem zu konstruieren. Insbesondere hat Buldt überzeugend für die folgende These argumentiert: Im Sommer 1931 hatte Carnap bereits realisiert, dass Hilberts ω-Regel zu einem System der Arithmetik hinzugefügt werden kann und dass dadurch eine bestimmte Art der Unvollständigkeit beseitigt werden kann. Dennoch schreckte Carnap zunächst davor zurück, die ω-Regel in die Modellsprache aufzunehmen (Buldt, 2004, S. 243).

[61] In einer Notiz, die Carnap am 10. Juni 1931 nach einer Diskussion mit Gödel verfasste, bemerkte er, dass dieser Gleichungskalkül gewissen Restriktionen zu unterwerfen ist. Doch diese Bemerkung spricht nicht gegen meine Darstellung. Denn Carnap wollte sich Restriktionen der folgenden Art bedienen: „1.) Widerspruchsfreiheit, aber vielleicht nur im praktisch-plausiblen Sinn: Bewährung durch langjährigen Gebrauch und so fort. 2.) Keine überflüssigen Teile" (Köhler et al., 2002, S. 113).

individueller und spezifischer Allgemeinheit gemacht werden soll, führte er nur beschränkte Quantoren ein und drückte unbeschränkte Allgemeinheit durch freie Variablen aus. Und da er drittens forderte, dass eine syntaktische Unterscheidung gemacht werden soll zwischen qualitativen Relationen und Lagebeziehungen, konstruierte er seine Modellsprache als Koordinatensprache (ibid., S. 314).

Da diese drei Forderungen die Form der Sprache bestimmen, die zu der Sprache der Wissenschaft werden soll, kann gefragt werden, weshalb diese Forderungen zu erfüllen sind. Und tatsächlich findet sich in Carnaps Referaten eine Antwort auf diese Frage: Er behauptete, dass diese Forderungen aus epistemischen Einsichten resultieren und Eigenschaften einer Sprache darstellen, die aus epistemischen Gründen wünschenswert sind. Insbesondere sind die ersten beiden Forderungen das Resultat von Einsichten in die Natur der Verifikation: Gemäss Carnap wird ein allgemeiner Satz durch „empirische Durchlaufung" verifiziert (ibid.). Daher können nur diejenigen allgemeinen Sätze verifiziert werden, die sich auf einen endlichen Bereich beziehen. Unbeschränkte Allgemeinheiten hingegen drücken nicht verifizierbare Hypothesen aus, die konventionelle Festsetzungen sind (ibid., S. 330).[62] Es gibt daher eine prinzipielle Differenz zwischen zwei Typen der Allgemeinheit und es ist genau diese Differenz, die erklärt, weshalb zu fordern ist, dass eine Sprache der Wissenschaft die ersten beiden Forderungen erfüllen soll.[63]

3.4 Das *Metalogik* Manuskript

Im Herbst 1931 begann Carnap an einem Manuskript zu arbeiten, das zur ersten Version seiner *Logischen Syntax* wurde. Zwar ist von diesem *Metalogik* Manuskript einzig das Inhaltsverzeichnis erhalten (Carus, 2007, S. 250–251), es ist aber dennoch klar, dass die Position, die Carnap in diesem Manuskript entwickelte, sich in verschiedenen Hinsichten von derjenigen unterschied, die er in seinen Referaten vertreten hatte. Insbesondere konstruierte er nicht länger einzig die Sprache I, er begann auch, eine Sprache zu konstruieren, die zur späteren Sprache II wurde. [64]

[62] Wie in Kapitel 2.5.2 diskutiert, unterschied Carnap bereits 1930 zwischen zwei Arten von Allaussagen, zwischen denjenigen, die eine numerische Allgemeinheit ausdrücken, und denjenigen, die eine spezifische Allgemeinheit ausdrücken.

[63] Es ist nicht vollständig klar, weshalb Carnap glaubte, die dritte Forderung aufstellen zu müssen. Diese dritte Forderung scheint dadurch motiviert gewesen zu sein, dass er glaubte, dass in jeder Beschreibung letztlich ein Koordinatensystem vorausgesetzt ist und dass die Relationen, die in diesem vorausgesetzten System gründen, von denjenigen Relationen zu unterscheiden sind, die auf die qualitativen Eigenschaften der beschriebenen Objekte zurückgehen (Stadler, 1997, S. 312–313).

[64] Im Unterschied zur Sprache I umfasst die Sprache II der *Logischen Syntax* „auch die Arithmetik der reellen Zahlen und die Analysis im Umfang der klassischen Mathematik, ferner die Mengenlehre" (Carnap, 1934a, S. 10). Syntaktisch zeigt sich dieser Unterschied darin, dass II auch unbeschränkte Operatoren besitzt und in den unbeschränkten Operatoren von II Individuenvariablen, Prädikatsvariablen, Funktorvariablen und Satzvariablen vorkommen können (ibid., § 28). Zusätzlich werden in II die Prädikatsausdrücke und die Funktorausdrücke

Dass Carnap damit begann, die Sprache II zu entwickeln, war eine Konsequenz davon, dass Gödel und Hahn seine Idee, die reellen Zahlen im Rahmen der Modellsprache zu konstruieren, als inadäquat erwiesen. Ich habe in Kapitel 3.3 betont, dass Carnap die Modellsprache der Referate als eine vereinfachte Version der idealen Wissenschaftssprache erachtete und dass er die reellen Zahlen in dieser Sprache konstruieren wollte. Doch Gödel und Hahn überzeugten ihn im Juli 1931 davon, dass ein solcher Zugang nicht zu einer Theorie der reellen Zahlen führen kann, die den Ansprüchen der klassischen Mathematik genügt.[65]

Carnap sah sich daher mit der Aufgabe konfrontiert, die reellen Zahlen in einer anderen Weise zu konstruieren als sie metalogisch in die Modellsprache einzuführen, und um diese Aufgabe zu lösen, begann er damit eine zweite Sprache zu entwickeln – die sogenannte erweiterte Sprache –, die das in der klassischen Mathematik benötigte Begriffssystem liefern sollte.[66] Doch während die Wahl zwischen der Sprache I und der Sprache II in der *Logischen Syntax* als eine reine Sache der Zweckmässigkeit gilt (Carnap, 1934a, S. 51–52), stellte Carnap seine zwei Sprachen im Herbst 1931 noch keineswegs auf dieselbe Stufe. Die Modellsprache galt ihm noch immer in einem gewissen Sinne als die eigentliche Sprache, die erweiterte Sprache hingegen als ein Hilfsmittel, das nicht denselben privilegierten Status besitzt. Insbesondere formulierte er im *Metalogik* Manuskript eine Rechtfertigung der Form der Modellsprache, und zwar bediente er sich dabei der gleichen epistemisch wünschenswerten Eigenschaften wie in den Referaten. Den Aufbau der erweiterten Sprache rechtfertigte er hingegen nicht oder zumindest nicht detailliert.[67]

Zusätzlich versuchte Carnap im *Metalogik* Manuskript nicht länger, die Mathematik als ein System von Quasiformeln zu konstruieren. Stattdessen wollte er die Mathematik nun als ein begriffliches Hilfsmittel erweisen, indem er versuchte, einen syntaktischen Ersatz für ein bivalentes Wahrheitsprädikat für die logisch-mathematischen Sätze zu definieren. Wie später

---

gemäss der einfachen Typentheorie in Typen eingeteilt (ibid., § 27). Die Grundsätze und Schlussregeln von II unterscheiden sich in erster Linie darin von denjenigen von I, dass in II auch Grundsätze und Schlussregeln für die unbeschränkten Operatoren aufgestellt werden sowie ein Grundsatz der Auswahl und Grundsätze der Extensionalität für Prädikate und Funktoren (ibid,. § 30–31).

[65] Bereits am 2. Juli verwies Hahn im Wiener Kreis auf dieses Problem für Carnaps Projekt (Stadler, 1997, S. 333). Carnaps Notizen deuten allerdings darauf hin, dass ihn erst Gödel ein paar Tage später davon überzeugte, dass Hahn recht hatte. Am 12. Juli notierte er nach einem Gespräch mit Gödel, dass „eine auf meiner Basis aufgebaute Theorie der reellen Zahlen sich nicht wesentlich von der des Intuitionismus unterscheidet“ (Köhler et al., 2002, S. 114).

[66] In den ersten beiden Teilen des Manuskripts entwickelte Carnap die Modellsprache. Im dritten Teil führte er dann die erweiterte Sprache ein (Carnap, 1932b).

[67] Wie das Inhaltsverzeichnis zeigt, enthielt die Diskussion der Modellsprache ein Kapitel, das den Titel trug ‚Bemerkungen zur Begründung der Form der Modellsprache‘ (Carnap, 1932b). Das Manuskript enthielt kein entsprechendes Kapitel für die erweiterte Sprache. Zusätzlich enthielt das Kapitel, das der Begründung der Form der Modellsprache gewidmet war, ein Unterkapitel ‚Stellen als Objekte‘ sowie ein Unterkapitel ‚Individuelle und spezifische Allgemeinheit‘ (Carnap, 1932b). Es ist daher höchst plausibel zu vermuten, dass Carnap seine Konstruktion der Modellsprache noch immer in derselben Weise rechtfertigte, wie er es in seinen Referaten getan hatte.

in der *Logischen Syntax* unterschied er daher zwischen den analytischen und den beweisbaren Sätzen sowie im Allgemeinen zwischen f-Begriffen und a-Begriffen.[68]

Auch wenn wir nicht wissen, wie Carnap den Begriff der Analytizität in diesem Manuskript genau zu definieren versuchte (Awodey & Carus, 2007, S. 37), ist es dennoch plausibel zu vermuten, dass er schon im Herbst 1931 realisiert hatte, dass dieser Begriff nicht in der Sprache definiert werden kann, für die dieser Begriff definiert wird.

Am 2. Juli 1931 machte Gödel nämlich in einer Diskussion im Wiener Kreis die folgende Bemerkung:

> Es ist nun nachgewiesen, daß gewisse metamathematische Begriffe in derselben Sprache definierbar sind, z. B. ‚Formel', ‚beweisbare Formel' und überhaupt alle Begriffe, die z. B. Hilbert verwendet. Dagegen gibt es andere metamathematische Begriffe, die nicht innerhalb derselben Sprache definiert werden können; d.h. wenn man sie verwenden würde, so würde dies zu einem Zirkel/Antinomie führen. Ein Bespiel hierfür ist in Ihrem [Carnaps] System der Begriff ‚richtige numerische Formel'. (Stadler, 1997, S. 333)

Carnap realisierte sofort, dass Gödel recht hatte. Am gleichen Tag noch notierte er in seinem Tagebuch, dass ein Widerspruch entstehen würde, wenn ‚richtige numerische Formel' in einer Metalogik definierbar wäre, die in einer Sprache der Arithmetik ausdrückbar ist (Köhler et al., 2002, S. 113–114).[69]

Ich habe in Kapitel 3.3 darauf hingewiesen, dass Carnap in seinen Referaten nicht versuchte, das Prädikat ‚richtige numerische Formel' metalogisch zu definieren. Der drohende Widerspruch stellte daher keine unmittelbare Bedrohung für die Position dar, die er im Juni 1931 vertreten hatte. Doch sobald Carnap sich daran machte, ein solches Prädikat zu definieren, musste dieser Widerspruch ihn mit der Frage konfrontiert haben, in welcher Sprache ein solches Prädikat für die Modellsprache oder für die erweiterte Sprache definiert

---

[68] In der *Logischen Syntax* wird die Unterscheidung zwischen den a-Begriffen und den f-Begriffen in § 47 entwickelt. Diese Unterscheidung beruht auf der Unterscheidung zwischen den Ableitungs- und den Folgebestimmungen einer Sprache: In der Definition der a-Begriffe wird nur auf die Ableitungsbestimmungen Bezug genommen, in der Definition der f-Begriffe auch auf die Folgebestimmungen. Dass Carnap diese Unterscheidung bereits im *Metalogik* Manuskript machte, wird dadurch belegt, dass ein Kapitel dieses Manuskriptes den Titel trug ‚A-Unvollständigkeit der Modellspr. u. d. erweit. Sprache' (Carnap, 1932b).

[69] Das Argument, das Carnap am 2. Juli 1931 in seinem Tagebuch skizzierte, ist eine Version der Antinomie von Richard. Das Argument weist eine grosse Ähnlichkeit mit demjenigen auf, dass Carnap 1934 in seinem Aufsatz *Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik* entwickelte (Carnap, 1934b, S. 266). Doch während er in diesem Aufsatz aus der Antinomie den Schluss zog, dass eine Aufzählung der einstelligen Zahlprädikate einer konsistenten Sprache nicht mit den Mitteln dieser Sprache formuliert werden kann (ibid., S. 272), galt ihm diese Antinomie am 2. Juli noch als einen Beweis dafür, dass das Prädikat ‚korrekte numerische Formel' in einer arithmetisierten Metamathematik nicht definiert werden kann (Köhler et al., 2002, S. 113–114).

werden kann. Und es ist plausibel zu behaupten, dass er schon bald realisierte, dass es von den logisch-mathematischen Ressourcen der Objektsprache abhängt, welche logisch-mathematischen Ressourcen in der metalogischen Sprache vorausgesetzt werden müssen, damit sich in ihr ‚richtig' für die Objektsprache definieren lässt. So bemerkte er am 3. März 1932: „‚richtig' inbezug auf die Modellsprache läßt sich definieren, sobald unbeschränkte Zahloperatoren verwendet werden. ‚richtig' in der erweiterten Sprache kann nur definiert werden, wenn man variable Prädikate, auch in Operatoren, verwendet" (Köhler et al., 2002, S. 116). Diese Bemerkung ist zugegebenermassen nicht vollständig klar. Dennoch stützt sie die eben aufgestellte Behauptung: Die Modellsprache liess nur beschränkte Quantifikationen zu. Daher enthält die Bemerkung die Behauptung, dass ‚richtig' für die Modellsprache nicht in dieser Sprache definiert werden kann, sondern in einer Sprache definiert werden muss, die auch unbeschränkte Quantifikationen über Zahlen zulässt, und also in einer Sprache, deren logische Ressourcen stärker sind als diejenigen der Modellsprache. Zudem enthält die Bemerkung die Behauptung, dass sich ‚richtig' für die Modellsprache bereits in einer metalogischen Sprache definieren lässt, die sich von der Modellsprache einzig darin unterscheidet, dass sie auch unbeschränkte Quantifikationen über Zahlen gestattet, und dass also ‚richtig' für die erweiterte Sprache nur in einer metalogischen Sprache definiert werden kann, die wiederum stärker ist als die Sprache, die zur metalogischen Beschreibung der Modellsprache benötigt wird.

In seinen Referaten hatte Carnap angenommen, dass die Hintergrundtheorie, die er benötigte, um Konsequenzen aus den metalogischen Definitionen ableiten zu können, sich vollständig in der Modellsprache ausdrücken lässt. Doch wenn die gerade eben entwickelte Vermutung korrekt ist, so hatte er also bereits im Frühling 1932 realisiert, dass diese Annahme nicht mit dem Ziel zu vereinbaren ist, mathematische Wahrheit metalogisch zu definieren. Die Hintergrundtheorie, die er benötigte, musste stärker sein als die Modellsprache. Tatsächlich sah sich Carnap gezwungen, eine gewisse Form einer Hierarchie von metalogischen Sprachen einzuführen. Am Anfang dieser Hierarchie stand die Sprache, die Carnap verwenden wollte, um die Metalogik der Modellsprache zu beschreiben, dann folgte die metalogische Sprache, mit der er die erweiterte Sprache beschreiben wollte. Sollte für diese zweite metalogische Sprache erneut ein Begriff der Analytizität definiert werden, so war angesichts der semantischen Antinomien wiederum eine weitere metalogische Sprache notwendig. [70]

[70] Ich behaupte nicht, dass Carnap schon im Frühjahr 1932 erkannt hatte, dass die metalogische Sprache, die er benötigte, um ‚analytisch' für die erweiterte Sprache definieren zu können, stärker sein musste als die erweiterte Sprache selbst. Ich behaupte also auch nicht, dass er bereits zu dieser Zeit realisiert hatte, dass er zur Verwirklichung seines Projektes „eine unendliche Reihe immer reicherer Sprachen" benötigte (Carnap, 1934a, S.

Doch wie lässt sich diese Annahme einer Hierarchie von metalogischen Sprachen mit der Annahme vereinbaren, dass es letztlich die eine korrekte Sprache gibt? Soweit ich weiss, erlaubt es das in Carnaps Nachlass erhaltene Material nicht, diese Frage mit Bestimmtheit zu beantworten. Es ist jedoch zu vermuten, dass diese verschiedenen metalogischen Sprachen in derselben Weise als blosse Hilfssprachen verstanden werden sollten wie die erweiterte Sprache.

Da Carnap also einen beträchtlichen Preis dafür zahlen musste, dass er versuchte, die Mathematik als analytisch zu erweisen, drängt sich die Frage auf, weshalb er den Zugang, den er in seinen Referaten verteidigte hatte, verwarf. Meines Erachtens ist eine plausible Antwort die folgende: In seinen Referaten präsentierte Carnap lediglich die spätere Sprache I. Doch in seinem *Metalogik* Manuskript konstruierte er eine zweite Sprache, die die in der klassischen Mathematik benötigen Begrifflichkeit liefern sollte, und er verwarf diesen Zugang, weil er erkannte, dass er nicht zu einer adäquaten Darstellung dieser zweiten Sprache führen kann.

In seinen Referaten über Metalogik behauptete Carnap, dass all diejenigen arithmetischen Sätze in der Modellsprache entscheidbar sind, die keine freien Variablen enthalten (Stadler, 1997, S. 328–329). Im Juni 1931 war er also davon überzeugt, dass der von ihm definierte Begriff der Beweisbarkeit zu einer vollständigen Zweiteilung aller arithmetischen Sätze seiner Sprache führt, die keine unbeschränkten Allgemeinheiten sind. Meines Erachtens erachtete er dies als eine hinreichende Basis dafür um behaupten zu können, dass die Arithmetik ein reiner Hilfskalkül ist. Auf Grund der beschränkten logisch-mathematischen Mittel der Modellsprache konnte er also einen Begriff der Beweisbarkeit als einen hinreichenden Ersatz für einen Begriff der mathematischen Wahrheit erachten und er konnte die Unvollständigkeit seines Deduktionssystems als unproblematisch ansehen. Doch als er damit begann, die Sprache II zu entwickeln, realisierte er, dass die Idee, die Sprache I als die metalogische Sprache zur Beschreibung der Sprache II zu verwenden, es ihm nicht erlaubte, die These zu verteidigen, dass auch die logisch-mathematischen Ressourcen der Sprache II lediglich ein

165). Wie ich in Kapitel 3.6 zeigen werde, glaubte Carnap im *Metalogik* Manuskript bei der Beschreibung der erweiterten Sprache mit einer metalogischen Sprache auskommen zu können, die einzig Quantifikationen über Mengen (von Mengen usw.) von Ausdrücken der erweiterten Sprache gestattet. Da die erweiterte Sprache Quantifikationen über beliebige Mengen gestattet, hätte die von Carnap gegebene Definition von ‚analytisch' für die erweiterte Sprache vermutlich in dieser Sprache selbst ausgedrückt werden können. Carnap war jedoch davon überzeugt, mit seiner Definition ein bivalentes Wahrheitsprädikat für die logisch-mathematischen Sätze der erweiterten Sprache definiert zu haben und also ein Prädikat, das sich angesichte der semantischen Antinomien nicht in der erweiterten Sprache definieren lässt. Daher ist zu vermuten, dass er im *Metalogik* fälschlicherweise annahm, dass sich die metalogische Sprache, der er sich bei der Beschreibung der erweiterten Sprache bediente, nicht in der erweiterten Sprache selbst formalisieren lässt.

begriffliches Hilfsmittel sind: Ein in der Sprache I definierter Begriff der Beweisbarkeit für II ist ein zu schwacher Begriff, als dass sich auf ihn diese These stützen liesse.[71]

Ich habe in Kapitel 3.3 diskutiert, wie Carnap versuchte, sein Projekt gegen Wittgensteinsche Einwände zu verteidigen, indem er seine Metalogik mit einer Theorie konkreter Inskriptionen gleichsetzte. Wenn aber die metalogische Sprache einen bivalenten Begriff der mathematischen Wahrheit enthalten soll, so kann die Metalogik nicht länger als eine elementare Theorie der Verkettung verstanden werden, die sich in der Modellsprache selbst formulieren lässt. Daher hatte Carnap die Konzeption von Metalogik zu verwerfen, die er in seinen Referaten verteidigt hatte. Tatsächlich ist es auch kaum zu bezweifeln, dass er in seinem *Metalogik* Manuskript nicht mehr länger versuchte, sein Projekt in der Weise gegen Wittgensteinsche Einwände zu verteidigen, wie er es in seinen Referaten getan hatte. Das Inhaltsverzeichnis dieses Manuskripts zeigt, dass er nicht mehr länger eine fundamentale Differenz zwischen seiner Metalogik und Gödels Metamathematik geltend machte und dass er in der Methode der Arithmetisierung nicht mehr länger ein blosses Hilfsmittel für die Konstruktion einer Metalogik sah. Er begann nun damit, sich dieser Methode zu bedienen, um die metalogische Sprache in der Modellsprache auszudrücken (Carnap, 1932b). Es ist daher höchst plausibel zu behaupten, dass er nun auch damit begann, zwischen deskriptiver und reiner Syntax zu unterscheiden, und dass er, anstatt seine Metalogik mit einem Mittel zur Beschreibung von kombinatorischen Eigenschaften von physikalischen Gebilden zu identifizieren, seine Konzeption in einer Weise erweiterte, die es ihm erlaubte, die Hierarchie von Metasprachen, die er benötigte, als eine Hierarchie metalogischer Sprachen zu verstehen.[72]

3.5 Ein Ausbruch aus einem Wittgensteinschen Gefängnis?

Bevor ich Carnaps intellektuelle Entwicklung weiter diskutiere, untersuche ich zunächst eine These, die von Awodey und Carus vertreten wird (Awodey & Carus, 2007; Awodey & Carus, 2009). Ihre Aufsätze sind die einzigen mir bekannten Publikationen, die den *Versuch einer Metalogik* im Detail diskutieren, und Awodey und Carus versuchen in ihnen die These zu begründen, dass es Carnap mit dem *Versuch* gelang, aus einem „Wittgensteinschen Gefängnis“ [*Wittgenstein's prison*] auszubrechen (Awodey & Carus, 2007, S. 32–35). Ich habe bereits in Kapitel 3.1 betont, dass der *Versuch* auf Ideen aufbaut, die sich im *Tractatus* finden, und es sollte daher nicht erstaunen, dass ich diese These für verfehlt erachte.

[71] Die letzten beiden Abschnitte profitierten erheblich von Diskussionen mit Tom Ricketts. Die Resultate des Versuchs, die Syntax der Sprache II in einer schwachen Metasprache zu beschreiben, werden diskutiert in (Goldfarb & Ricketts, 1992, Kap. 3).

[72] Ich werde die Entwicklung, die Carnap von der in den Referaten entwickelten Konzeption von Metalogik hin zur Syntaxkonzeption der *Logischen Syntax* führte, in Kapitel 3. 6 detaillierter diskutieren.

Da ich also gegen eine Interpretation des *Versuchs* argumentiere, die dieses Manuskript in erster Linie als eine Kritik an Wittgenstein versteht, möchte ich gleich zu Beginn betonen, dass ich keineswegs behaupte, dass Carnap die im *Tractatus* entwickelte Konzeption ohne Weiteres akzeptierte. Seine Beurteilung dieses Buches war auch um 1930 ambivalent. Einerseits verdankte er dem *Tractatus* die für seine Philosophie zentrale Einsicht, dass die Sätze der Logik blosse Tautologien sind (Carnap, 1963a, S. 25–28). Andererseits konnte er aber auch verschiedenen Komponenten von Wittgensteins Werk nicht viel Positives abgewinnen. Insbesondere schien ihm Wittgensteins Mystizismus grundsätzlich unvereinbar zu sein mit seinem Ideal einer wissenschaftlichen Weltauffassung (ibid., S. 28).

Gemäss Awodey und Carus enthielt jedoch der *Tractatus* nicht nur Elemente, die Carnap nicht akzeptieren konnte, ihrer Ansicht nach hatte die in diesem Buch entwickelte Sprachkonzeption auch Konsequenzen, die Carnap prinzipiell nicht akzeptieren konnte. Ihre Darstellung kann wie folgt zusammengefasst werden: Carnap war davon überzeugt, dass der *Tractatus* auf einer wahrheitsfunktionalen Sprachauffassung beruht, die unbeschränkte Quantifikationen und jedes Reden über die Sprache ausschliesst. Doch wenn nur Wahrheitsfunktionen von endlich vielen Elementarsätzen sinnvolle Sätze sind, so müssen grosse Teile der in den Naturwissenschaften entwickelten Theorien als sinnlos eingestuft werden. Wenn zudem nicht über die Sprache gesprochen werden kann, dann lassen sich die zulässigen philosophischen Erläuterungen nicht mehr scharf von den metaphysischen Scheinsätzen abgrenzen. Daher war Carnap in einem Wittgensteinschen Gefängnis eingesperrt: Vor seiner schlaflosen Nacht im Januar 1931 sah er nicht, wie er diese für ihn inakzeptablen Konsequenzen vermeiden konnte, ohne dabei auch die von ihm als entscheidend eingestuften Momente der *Tractatus* Konzeption verwerfen zu müssen (Awodey & Carus, 2007, S. 26–28).

Behaupten Awodey und Carus aber zu Recht, dass Carnap in seiner schlaflosen Nacht im Januar 1931 erkannte, wie jene beiden problematischen Konsequenzen des *Tractatus* vermieden werden können?[73] Wird im *Versuch* tatsächlich gezeigt, wie über Sprache gesprochen werden kann, und wird darin eine wahrheitsfunktionale Sprachauffassung verworfen?

Es ist richtig, dass Carnap davon überzeugt war, dass gemäss Wittgenstein nicht über die Logik gesprochen werden kann (Carnap, 1934a, S. 208). Es ist ebenfalls richtig, dass der *Tractatus* aus diesem Grund einen hemmenden Einfluss auf Carnaps Denken um 1930 hatte.

[73] Ich werde die Frage, ob Carnap 1930 tatsächlich in einem solchen Wittgensteinschen Gefängnis gefangen war, in Kapitel 6 diskutieren.

Dies belegt zum Beispiel die folgende Stelle aus einem Brief von Tarski an Neurath, in dem sich Tarski an eine Unterhaltung erinnert, die er mit Carnap im Jahre 1935 führte:

> Auf meine Bitte hat nämlich Carnap erzählt, worin der Einfluß Wittgensteins auf den Wiener Kreis und auf ihn persönlich bestand. Er hat damals gesagt, daß dieser Einfluß einerseits anregend, andrerseits hemmend war. Der Einfluß war anregend, da W. auf die Wichtigkeit der Probleme aufmerksam machte, die die Sprache betreffen … der Einfluß war aber auch hemmend, da eben W. die Möglichkeit, über die Sprache legitim und einwandfrei zu sprechen, bestritt und ablehnte. (Tarski, 1992, S. 15)

Schliesslich ist es auch richtig, dass Carnap glaubte, mit seiner *Logischen Syntax* die Wittgensteinsche These widerlegt zu haben, dass sich die logischen Eigenschaften von Sätzen nicht durch die Sprache ausdrücken lassen. Seine Widerlegung brachte er in diesem Buch wie folgt auf den Punkt:

> Im Gegensatz hierzu hat unser Aufbau der *Syntax* gezeigt, daß sie korrekt formulierbar ist, daß es syntaktische Sätze gibt. Man kann genau so gut Sätze über die Formen von Sprachausdrücken, also auch von Sätzen bilden, wie Sätze über die geometrischen Formen geometrischer Gebilde; nämlich erstens die analytischen Sätze der reinen Syntax, die auf die Formen und Formbeziehungen von Sprachausdrücken bezogen werden können (analog den analytischen Sätzen der arithmetischen Geometrie, die auf Formbeziehungen der abstrakt-geometrischen Gebilde bezogen werden können); zweitens die synthetischen, empirischen, physikalischen Sätze der deskriptiven Syntax, die von den Formen der Sprachausdrücke als physikalischer Gebilde handeln (analog den synthetischen, empirischen Sätzen der physikalischen Geometrie). *Die Syntax ist somit in derselben Weise exakt formulierbar wie die Geometrie*. (Carnap, 1934a, S. 208–209)

Dennoch ist es falsch zu behaupten, dass es Carnap bereits im *Versuch* gelang zu erklären, wie über die Logik gesprochen werden kann: Carnap behauptete in diesem Manuskript einfach, dass sich das, was sich nach Wittgenstein zeigt, in metalogischen Sätzen ausdrücken lässt, ohne zu fragen, wie metalogische Sätze überhaupt möglich sein können. Er verwarf die Unterscheidung zwischen Sagen und Zeigen und ersetzte sie durch diejenige zwischen logischen und metalogischen Begriffen, doch eine Reflexion über die Zulässigkeit dieses Schrittes fehlte vollständig. Erst in den Wochen, nachdem er den *Versuch* niedergeschrieben hatte, wandte er sich dem Problem zu, eine Klärung des Status seiner Metalogik zu erbringen, und erst im Sommer 1931 glaubte er, mit seiner Konzeption von Metalogik als einer Theorie konkreter Inskriptionen dieses Problem gelöst zu haben.

Wie bereits erwähnt, behaupten Awodey und Carus aber auch, dass Carnap im *Versuch* die Wittgensteinsche Auffassung von Sätzen als Wahrheitsfunktionen von Elementarsätzen verwarf und eine Position akzeptierte, der die logische Sprache als „a system of uninterpreted marks" gilt (Awodey & Carus, 2007, S. 32). Das Resultat dieses Schrittes beschreiben sie in der folgenden Weise:

> Wittgenstein's idea of language as exhaustively characterizable by rules was taken a step further. The rules were no longer to be *found*, they were no longer objectively determinate and discoverable artifacts of the nature of representation, as Wittgenstein had appeared to suggest. Instead, they were a matter of human decision, conventions by which we set up the language of science. (ibid., S. 35)

Awodey und Carus behaupten also erstens, dass Carnap sich im *Versuch* von der Idee distanzierte, dass die Sätze Wahrheitsfunktionen der Atomsätze sind, und zwar weil ihm die logische Sprache nun als ein System uninterpretierter Zeichen galt. Zweitens behaupten sie, dass er auf Grund dieses Schrittes zu einer syntaktischen Betrachtungsweise die Bildtheorie des *Tractatus* verwarf und durch die Idee ersetzte, dass die Regeln der Sprache eine Sache der menschlichen Entscheidung sind.

Allerdings ist die erste dieser beiden Behauptungen offensichtlich falsch: Es bestehen keine Zweifel daran, dass Carnap im *Versuch* alle Sätze als Wahrheitsfunktionen der Atomsätze verstand.[74] Zudem sollte die Diskussion in Kapitel 3.1 deutlich gemacht haben, dass die logische Sprache im *Versuch* gerade noch nicht als ein System uninterpretierter Zeichen behandelt wird.

Tatsächlich liefern Awodey und Carus auch keine wirklichen Belege für ihre erste Behauptung. Um ihre Behauptung zu stützen, dass die logische Sprache im *Versuch* als ein System uninterpretierter Zeichen behandelt wird, verweisen sie lediglich darauf, dass die Atomsätze durch eine rein formale Charakterisierung eingeführt werden (ibid., S. 32). Es ist zwar durchaus richtig, dass die Atomsätze im *Versuch* in dieser Weise eingeführt werden, dennoch liefert dieser Umstand keine Begründung für die Behauptung von Awodey und Carus: Im *Versuch* konstruierte Carnap eine wahrheitsfunktionale Semantik für eine Sprache

[74] Wie in Kapitel 3.1 gezeigt, werden ja im *Versuch* die logischen Zeichen durch Festsetzungen eingeführt, die bestimmen, wie der Wahrheitswert des logisch komplexen Satzes vom Wahrheitswert der Atomsätze abhängt. Es ist daher offensichtlich, dass Carnap in diesem Manuskript eine wahrheitsfunktionale Sprachkonzeption vertrat.

der Quantorenlogik erster Stufe und er interpretierte die Quantoren substitutionell. Damit eine solche Konstruktion möglich ist, muss den Atomsätzen eine einzige semantische Eigenschaft zugeschrieben werden, und zwar diejenige, dass sie einen Wahrheitswert besitzen. Obwohl Carnap eine wahrheitsfunktionale Semantik konstruierte, konnte er daher die Atomsätze durch eine rein formale Charakterisierung einführen. Denn im Anschluss an diese Charakterisierung führte er ja die zusätzliche Annahme ein, dass die Atomsätze wahr oder falsch sind, und es ist diese Annahme, die den Atomsätzen diejenige Eigenschaft verleiht, die neben ihren syntaktischen Eigenschaften in der Konstruktion noch benötigt wird.[75]

Allerdings entwickelte Carnap in der ersten Hälfte des Jahres 1931 tatsächlich eine syntaktische Konzeption und es kann daher noch immer gefragt werden, ob die zweite Behauptung, die von Awodey und Carus vertreten wird, zumindest auf die Position zutrifft, die Carnap ausgehend vom *Versuch* entwickelte. Verwarf Carnap also mit seinem Schritt zu einer syntaktischen Konzeption tatsächlich die Idee, dass die Struktur des Gegebenen der Gestaltung der Syntax Restriktionen auferlegt?

Einerseits betonen Awodey and Carus zu Recht, dass Carnap mit seinem Schritt zu einer syntaktischen Konzeption die These zu vertreten begann, dass die Sprache im Rahmen der Metalogik einzig und alleine als ein System von Regeln behandelt werden kann, ohne dass in der metalogischen Beschreibung der Sprache auf etwas Bezug genommen wird, das ausserhalb der Sprache liegt (ibid., S. 32). Diese Konzeption ist daher gegen die Idee gerechtet, dass in der metalogischen Beschreibung der Sprache auch auf diejenigen Sachverhalte Bezug genommen werden muss, die durch die Sätze abgebildet werden (Carnap, 1932a, S. 435–436).

Andererseits ist es aber auch klar, dass Carnap mit seinem Schritt zu einer syntaktischen Auffassung die Idee noch nicht verwarf, dass die Struktur des Gegebenen der Syntax einer Sprache Zwänge auferlegt. Carnap akzeptierte sein Toleranzprinzip erst im Herbst 1932 und erst dann begann er damit, die Regeln einer Sprache als konventionelle Festsetzungen anzusehen. Vor diesem Schritt vertrat er noch immer die These, dass es im Wesentlichen die eine korrekte Sprache gibt, deren Regeln in der Metalogik zu beschreiben sind. Und meines Erachtens ist es klar, dass er an dieser These nur aus dem Grund festhalten konnte, weil er

[75] Zwar findet sich auf der dritten Seite des *Versuchs* eine Randnotiz, in der Carnap festhielt, dass der Wahrheitsbegriff „ganz anders ist als die anderen Begriffe der Metalogik“ und dass dieser Begriff unter Umständen vermeidbar sein könnte (Carnap, 1931b, S. 3). Allerdings lieferte er keine Hinweise darauf, wie dies geschehen könnte. Tatsächlich lässt sich die eigentliche Sprache ohne den Wahrheitsbegriff nicht in der Weise konstruieren, in der dies im *Versuch* geschieht. Auch diese Randnotiz stellt daher keinen Beleg für die von Awodey und Carus gegebene Darstellung dar.

auch noch davon überzeugt war, dass die Regeln der Sprache zumindest teilweise durch die Struktur des Gegebenen determiniert sind.[76]

Mit seinem Schritt zur Syntax verwarf Carnap also die Idee einer Korrespondenz zwischen Sprache und Welt keineswegs vollständig. In der ersten Hälfte von 1931 entwickelte er lediglich eine Begrifflichkeit, um die Sprache als ein physikalisches Phänomen zu beschreiben. Sodann behauptete er, dass es diese Begrifflichkeit erlaubt, eine vollständig präzise metalogische Beschreibung der logischen Sprache zu geben, die frei ist von solchen metaphysischen Erwägungen, wie sie sich in Teilen des *Tractatus* finden.

Angesichts der zentralen Rolle, die Wittgensteinsche Idee für Carnaps Projekt im *Versuch* spielten, ist es also irreführend zu behaupten, dass es Carnap mit diesem Manuskript gelang, aus einem Wittgensteinschen Gefängnis auszubrechen. Vielleicht wurden Awodey und Carus durch die Darstellung in die Irre geführt, die sich in Carnaps Autobiographie findet: Diese Darstellung suggeriert ja tatsächlich, dass Carnap bereits im *Versuch* seine ursprüngliche Konzeption von Syntax entwickelte (Carnap, 1963a, S. 35). Wie allerdings inzwischen klar sein sollte, enthält der *Versuch* noch keine Konzeption von Sprachen als syntaktisch spezifizierten Kalkülen, das Manuskript enthält erst eine Unterscheidung zwischen Logik und Metalogik.

3.6 Syntax and Toleranz

Im Sommer 1932 hatte Carnap grosse Teile seines *Metalogik* Manuskripts fertiggestellt. Auch wenn dieses Manuskript schon deutliche Ähnlichkeiten mit der *Logischen Syntax* aufwies, unterschied es sich dennoch noch in verschiedenen Hinsichten von späteren Buch. Insbesondere fehlte das Toleranzprinzip im Manuskript noch und damit auch das gesamte Projekt einer allgemeinen Syntax.

Weshalb also wurde Carnap dazu geführt, in der Logik ein Toleranzprinzip zu akzeptieren? Zweifelsohne machte er diesen Schritt im Herbst 1932 (Awodey & Carus, 2007, S. 39). Allerdings sind in seinem Nachlass keine Dokumente erhalten, die eindeutig zeigen würden, wann und aus welchem Grund er eine tolerante Einstellung gegenüber der Wahl von Sprachformen akzeptierte (ibid.). Jede Antwort auf die eben gestellte Frage kann daher nur spekulativer Natur sein. In der Literatur finden sich zwei Antworten, die zumindest auf den

[76] So machte Carnap zum Beispiel am 26. Februar 1931 im Wiener Kreis noch die folgende Bemerkung: „1) Ein Sachverhalt, der z. B. aus Elementen besteht, muß durch eine Sprache mit derselben Zahl von Freiheitsgraden bezeichnet werden. 2) Sprechen wir z. B. von Farben, dann muß das System von Farbzeichen dieselbe Multiplizität haben, wie der Farbkörper.“ (Stadler, 1997, S. 289–290) Es ist zu beachten, dass Carnap diese Bemerkung machte, nachdem er sich dem syntaktischen Projekt des Manuskriptes *Einführung in die wissenschaftliche Philosophie* zugewandt hatte. Die ersten Skizzen zu diesem Manuskript stammen von 24. Februar 1931 (Carus, 2007, S. 316)

ersten Blick überzeugend erscheinen mögen. Die erste Antwort stammt von Awodey und Carus (ibid., S. 37–41), die zweite von Goldfarb (2009, S. 118–120). Beiden Antworten gilt der Schritt als eine Reaktion auf eine Schwierigkeit, auf die Gödel Carnap aufmerksam machte. Es ist daher unumgänglich, kurz auf diese Schwierigkeit einzugehen.

In seinem *Metalogik* Manuskript versuchte Carnap, ‚analytisch' für die erweiterte Sprache induktiv zu definieren, und zwar unter Verwendung einer substitutionellen Interpretation sowohl der Quantoren erster Stufe als auch der Quantoren höherer Stufe. Genauer versuchte er, den Begriff der Analytizität für quantifizierte Sätze in der folgenden Weise zu definieren: Ist f(x) ein arithmetische Formel, in der höchstens die Variable x frei vorkommt, so sollte ein Satz der Form (x)f(x) dann und nur dann analytisch heissen, wenn alle diejenigen Sätze analytisch sind, die aus der Formel f(x) dadurch entstehen, dass die numerische Variable x durch ein konstantes Zahlzeichen ersetzt wird. In analoger Weise versuchte Carnap zu definieren, wann Formeln, die höherstufige Quantifikationen enthalten, analytisch sind. Er setzte also zum Beispiel fest, dass ein Satz der Form (X)X(0) dann und nur dann analytisch ist, wenn alle diejenigen Sätze analytisch sind, die aus X(0) dadurch entstehen, dass X durch einen konstanten Prädikatsausdruck der erweiterten Sprache ersetzt wird (Awodey & Carus, 2007, S. 37).

In einem Brief vom 11. September 1932 zeigte Gödel Carnap jedoch auf, dass dieses Vorgehen scheitern muss, und er bemerkte: „Dieser Fehler läßt sich m. E. nur dadurch vermeiden, daß man als Laufbereich der Funktionsvariablen nicht die Präd. einer bestimmten Sprache, sondern alle Mengen u. Relationen überhaupt ansieht" (Gödel, 2003, S. 346). Das Problem, auf das Gödel Carnap aufmerksam machte, ist das folgende: Gemäss der von Carnap aufgestellten Definition soll ein Satz der Form (X)X(0) dann und nur dann analytisch sein, wenn alle Instanzen von X(0) analytisch sind. Doch diese Instanzen werden dadurch gebildet, dass für die Prädikatsvariable X konstante Prädikatsausdrücke der erweiterten Sprache eingesetzt werden, und da zur erweiterten Sprache auch der Prädikatsausdruck (X)X(...) gehört, ist Carnaps Definition zirkulär: Setzt man in der Definitionsklausel anstelle der Prädikatsvariablen X das konstante Prädikat (X)X(...) ein, so erhält man wieder den ursprünglichen Satz (Awodey & Carus, 2007, S. 37).

Carnap antwortete am 25. September auf Gödels Brief und seine Antwort zeigt, dass Gödel ihn davon überzeugt hatte, dass er sein Ziel einer Wahrheitsdefinition für die klassische Mathematik nur erreichen konnte, wenn er die Werte der Funktionsvariablen nicht mit den Prädikaten gleichsetzte, die sich in einer bestimmten Sprache definieren lassen. Und anfänglich war er schockiert: Er hatte keine Ahnung, wie es möglich sein könnte, in einer syntaktischen Metasprache über beliebige Werte von Funktionsvariablen zu sprechen (Gödel, 2003, S. 348–350). Doch bereits zwei Tage später schrieb er erneut an Gödel und bemerkte, dass es durchaus möglich ist, in einer syntaktischen Metasprache über alle diese Werte zu sprechen, und zwar dadurch, dass in der Metasprache ein unbeschränkter Allquantor verwendet wird (ibid., S. 355).

Weshalb aber sollte Gödels Kritik Carnap dazu gebracht haben, das Toleranzprinzip zu akzeptieren? Gemäss Awodey und Carus machte Carnap diesen Schritt aus dem Grund, weil diese Kritik ihn davon überzeugte, dass es so etwas wie die eine korrekte Metasprache nicht geben kann. Ihr Argument kann wie folgt zusammengefasst werden: Vor dem Briefwechsel mit Gödel war Carnap davon überzeugt, dass sich die Metasprache mittels der Methode der Arithmetisierung vollständig in der Objektsprache ausdrücken lässt. Gödels Brief vom 11. September zeigte ihm allerdings auf, dass ‚analytisch' nicht in der Objektsprache definiert werden kann und dass also die von ihm benötigte Metasprache nicht eine Teilsprache der Objektsprache sein kann. Hieraus zog Carnap den Schluss, dass es keine privilegierte Sprache geben kann, die als die korrekte Metasprache gelten kann. Er realisierte, dass eine Wahl zu treffen ist zwischen verschiedenen Metasprachen und dass die Entscheidung zugunsten einer bestimmten Metasprache zumindest teilweise konventioneller Natur ist (Awodey & Carus, 2007, S. 37–38, insb. Fussnote 30).

Ich habe bereits in Kapitel 3.4 gezeigt, dass die diesem Argument zugrunde liegende Annahme unhaltbar ist: Im September 1932 hatte Carnap längst realisiert, dass sich ‚analytisch' nicht mittels der Methode der Arithmetisierung in der Objektsprache definieren lässt. Doch die von Awodey und Carus gegebene Darstellung wird auch durch Carnaps Antwort auf Gödels Einwand widerlegt. In seinem Brief vom 25. September bemerkte Carnap nämlich:

> Es scheint mir nicht bedenklich, wenn ‚analytisch in der Sprache S' nicht definiert werden kann in einer Sem. [Semantik], die in S formalisiert ist, sondern nur in einer Sem., die in einer weiteren Sprache S_2 formalisiert ist. Aber mit einem Begriff zu operieren, für den es überhaupt keine Sprache gibt, in der er streng definiert werden kann, ist doch wohl ziemlich bedenklich.[77] (Gödel, 2003, S. 350)

Die von Awodey und Carus gegebene Darstellung ist offenkundig nicht mit der Tatsache zu vereinbaren, dass Carnap am 25. September bemerkte, dass ihm die Notwendigkeit einer „weiteren Sprache S_2" nicht bedenklich erscheint. Die eben zitierte Passage zeigt deutlich,

[77] Zu dieser Zeit nannte Carnap sein Projekt nicht mehr länger ‚Metalogik', sondern ‚Semantik'. Da Neurath die Bezeichnung ‚Semantik' ablehnte, wählte Carnap schliesslich die Bezeichnung ‚Syntax'. Vergleiche die Randnotizen in (Carnap, 1932b).

dass das Problem, das Gödels Kritik für Carnap aufwarf, nicht darin bestand, dass er nun realisierte, dass die Metasprache nicht eine Teilsprache der Objektsprache sein kann. Vielmehr liess ihn diese Kritik daran zweifeln, ob es überhaupt eine Sprache geben kann, in der sich ‚analytisch' streng definieren lässt.

Es lässt sich zwar nicht ausschliessen, dass Carnap realisierte, während er im Herbst 1932 versuchte, ‚analytisch' für die erweiterte Sprache zu definieren, dass die Wahl einer Metasprache rein konventioneller Natur ist, und dass ihn diese Einsicht zum Toleranzprinzip geführt hat. Doch das von Awodey und Carus formulierte Argument stützt diese Behauptung nicht. Tatsächlich gibt es denn auch eine Erklärung für den Schritt zum Toleranzprinzip, die sehr viel plausibler ist als die eben diskutierte. Die Grundzüge dieser Erklärung stammen von Goldfarb. Goldfarb betont zunächst, dass Gödels Brief Carnap dazu zwang einzusehen, dass er eine Metasprache benötigte, die die Wendung ‚für alle Mengen und Relationen überhaupt' enthält. Dann fährt er fort:

> … I agree with Awodey and Carus that it was Carnap's interchange with Gödel in 1932 that moved Carnap to formulate the principle of tolerance. … But I differ from them as to the reason. It is not, in my mind, an issue of the plurality of metalanguages that motivates Carnap. Rather, it is the need to have an opening for the view that logical syntax can use notions not specifiable in a particular system without thereby committing itself to Platonism, infinitarism, or the like. ‚In logic, there are no morals.' gives Carnap that opening. (Goldfarb, 2009, S. 120)

Wie also erklärt Goldfarb genau den Schritt zum Toleranzprinzip? Seine Idee ist die folgende: Carnap versuchte, einen syntaktischen Ersatz für ein bivalentes Wahrheitsprädikat für die mathematischen Sätze seiner erweiterten Sprache zu definieren, und Gödels Brief vom 11. September überzeugte ihn davon, dass eine solche Definition eine Metasprache voraussetzt, die die Wendung ‚alle Mengen überhaupt' enthält. Da es Carnap aber zweifelhaft erschien, ob eine Metasprache, die diese Wendung enthält, noch immer als eine genuin syntaktische Sprache gelten kann (Goldfarb, 2003, S. 339), sah er sich also im Herbst 1932 mit dem Problem konfrontiert, dass er die Notwendigkeit einer Metasprache, zu der die Wendung ‚alle Mengen überhaupt' gehört, mit der Forderung in Einklang zu bringen hatte, dass die Metasprache eine rein syntaktische Sprache sein soll (ibid.). Und da er seine Konzeption von Syntax durch die Annahme des Toleranzprinzips in entscheidender Weise erweiterte, ist es tatsächlich plausibel zu behaupten, dass er diesen Schritt machte, um die metasprachlichen Ressourcen, die er in seiner Definition von ‚analytisch' benötigte, als syntaktische einstufen zu können.

Um genauer zu verstehen, weshalb das eben angeführte Problem Carnap dazu geführt haben könnte, das Toleranzprinzip einzuführen, ist es unumgänglich kurz darauf einzugehen, wie Carnap seine Konzeption von Syntax ausgehend von seiner Position in den Referaten über Metalogik weiter entwickelte. Die Konzeption, die er in seinen Referaten verteidigte, basierte auf der Idee, dass eine metalogische Sprache, die eine Teilsprache der Modellsprache ist, hinreichend ist, um alle Fragen der Syntax zu diskutieren. Gerade weil Carnap die logisch-mathematischen Ressourcen seiner metalogischen Sprache mit denjenigen der Modellsprache gleichsetzte, konnte er sein Projekt durch den Hinweis rechtfertigen, dass seine Metalogik eine harmlose kombinatorische Theorie von konkreten Schriftzeichen ist.

Während er an seinem *Metalogik* Manuskript arbeitete, realisierte Carnap jedoch, dass er diese Konzeption zu erweitern hatte: Die semantischen Paradoxien zeigen, dass eine solche Konzeption nicht vertreten werden kann, wenn die metalogische Sprache einen bivalenten Begriff der mathematischen Wahrheit enthalten soll. Um einen solchen Begriff definieren zu können, führte Carnap eine Hierarchie von metalogischen Sprachen ein und verwarf die Idee, dass sich die syntaktischen Eigenschaften mit denjenigen Eigenschaften identifizieren lassen, die sich im Rahmen der Modellsprache ausgehend von gewissen primitiven physikalischen Prädikaten definieren lassen.

Doch obwohl Carnap seine Konzeption erweiterte und die Beschränkungen lockerte, die er zuvor seiner metalogischen Sprache auferlegt hatte, behielt er noch immer entscheidende Elemente seines früheren Zugangs bei: Auch wenn er nicht mehr länger daran glaubte, dass es eine einzige korrekte metalogische Sprache gibt, machte er den Schritt zum Toleranzprinzip noch nicht. Es ist daher plausibel anzunehmen, dass er noch immer glaubte, dass die Verwendung einer bestimmten Sprache als einer Sprache der Metalogik gerechtfertigt werden muss. Zudem zeigt der Briefwechsel mit Gödel, dass Carnap die Instanzen der Quantoren höherer Stufe der erweiterten Sprache auf die Prädikate beschränkte, die sich in der erweiterten Sprache selbst definieren lassen. Er konnte also immer noch geltend machen, dass die Quantoren erster Stufe seiner metalogischen Sprache einzig auf Ausdrücke Bezug nehmen, die in einer bestimmten Objektsprache auftreten, und die Quantoren höherer Stufe einzig auf Mengen (von Mengen usw.) von solchen Ausdrücken Bezug nehmen. Daher konnte er sein metalogisches Projekt noch immer durch die Behauptung rechtfertigen, dass die Metalogik eine reine Theorie sprachlicher Formen ist, deren Gegenstand die in einer gegebenen Sprache auftretenden Sequenzen sprachlicher Zeichen sind.

Gödels Einwand zwang Carnap jedoch einzusehen, dass eine solche Konzeption von Metalogik inadäquat ist. Er realisierte nun, dass er eine Metasprache benötigte, in der nicht nur über Mengen von Ausdrücken einer gegebenen Sprache quantifiziert werden kann, sondern über beliebige Mengen. Dies jedoch stellte sein gesamtes Projekt einer rein syntaktischen Theorie der Logik in Frage. Tatsächlich bemerkte Gödel in seinem Brief vom 11. September zunächst, dass eine adäquate Definition von ‚analytisch' für die erweiterte Sprache die Wendung ‚alle Mengen überhaupt' voraussetzt, und machte dann geltend:

> Ich ... bin der Meinung, daß sich die Sache anders nicht machen läßt u. daß man den höheren Funktionenkalkül *nicht* semantisch auffassen kann. D. h. man kann natürlich auf semantischer Basis einen höheren Funkt.-K. aufbauen, es sind dann aber gerade die Gesetze, welche man für die klassische Theorie der reellen Zahlen braucht, nicht erfüllt, weil man notwendigerweise zur verzweigten Typentheorie ... geführt wird. (Gödel, 2003, S. 346)

Carnap konnte sein Projekt also nur retten, indem er seine Konzeption von Syntax noch einmal grundlegend erweiterte. Zwar machte er in der *Logischen Syntax* noch immer geltend, dass die Syntax eine rein formale Disziplin ist, und er behauptete: „Die *Syntax* einer Sprache oder eines sonstigen Kalküls handelt allgemein von den *Strukturen möglicher Reihenordnungen* (bestimmter Art) *beliebiger Elemente*" (Carnap, 1934a, S. 6). Doch auf Grund des Toleranzprinzips können diese Charakterisierungen nicht mehr länger so verstanden werden, dass sie klar umrissene Restriktionen zum Ausdruck bringen, die eine Sprache zu erfüllen hat, wenn sie als eine für die logische Syntax akzeptable Sprache gelten soll. In der *Logischen Syntax* gelten diese Charakterisierungen selbst als informal und inexakt: Der Begriff einer formalen Eigenschaft eines Ausdrucks ist relativ zu einer gegebenen Metasprache und, da Carnap das Logische mit dem Formalen gleichsetzte, ist dieser Begriff dadurch zu präzisieren, dass in einer Metametasprache die logischen Ausdrücke der Metasprache charakterisiert werden. Gemäss der *Logischen Syntax* ist der Begriff des Formalen also selbst relativ zu einem gegebenen metasprachlichen System und es existiert kein sprachtranszendenter Begriff des Formalen mehr, der verwendet werden könnte, um die Zulässigkeit solcher Begriffe wie ‚für alle Mengen überhaupt' in einer Sprache der Syntax in Frage zu stellen.

Das Toleranzprinzip liefert also eine Lösung für das Problems, das Gödels Einwand für Carnaps Programm aufwarf. Da jedoch im Nachlass keine Dokumente erhalten sind, die es erlauben würden zu bestimmen, ob es die eine entscheidende Einsicht gab, die den Schritt zum Toleranzprinzip veranlasste, behaupte ich nicht, dass Carnap diesen Schritt machte, um Quantifikationen über beliebige Mengen in einer syntaktischen Metasprache für zulässig erklären zu können. Ich behaupte lediglich, dass das Prinzip eine umfassende Lösung für dasjenige Problem im *Metalogik* Manuskript liefert, auf das Gödel Carnap mit seinem Einwand aufmerksam gemacht hatte. Tatsächlich enthielt die Position, die Carnap in diesem Manuskript entwickelte, auch weitere Schwierigkeiten, die gelöst sind, wenn die Annahme einer einzigen korrekten Sprache aufgegeben wird. Zwei dieser zusätzlichen Schwierigkeiten verdienen es meines Erachtens auch noch, erwähnt zu werden.

Erstens bestand ein Spannung zwischen Carnaps Idee, dass die Metalogik die korrekte Sprache zu beschreiben hat, und seinem syntaktischen Zugang, der Präzision im Reden über die Logik dadurch zu erreichen versucht, dass ausschliesslich formale Eigenschaften von Zeichenreihen berücksichtigt werden: Wenn jemand behauptet, dass er die korrekte Sprache konstruiert, so kann man eine Rechtfertigung der Prinzipien verlangen, die seiner Konstruktion zugrunde liegen. Wie ich sogleich zeigen werde, können jedoch die Prinzipien, die Carnaps Konstruktion zugrunde lagen nicht mittels Erwägungen gerechtfertigt werden, die sich ausschliesslich auf syntaktische Eigenschaften beziehen. Daher setzte Carnaps metalogisches Programm Erwägungen voraus, die gemäss seiner eigenen Konzeption von Präzision nicht als präzise gelten können.

Im *Versuch* wollte Carnap eine vollständig präzise Konstruktion der Logik mittels metalogischer Bestimmungen erreichen. Das gesamte Projekt beruhte jedoch auf der unhinterfragten Voraussetzung, dass metalogische Bestimmungen selbst präzise sind. In *Einführung in die wissenschaftliche Philosophie* machte Carnap geltend, dass Präzision im Reden über Logik dadurch erreicht werden kann, dass die Metalogik als eine Theorie der kalkülmässig aufgebauten logischen Sprache verstanden wird. Diese These erlaubte es ihm zwar zu erklären, weshalb metalogische Bestimmungen präzise sind, er handelte sich dadurch aber das Problem ein, dass er nun nachweisen musste, dass der metalogisch konstruierte Kalkül nicht irgendein beliebiger Kalkül ist, sondern eine formale Version der Logik. Da sich ein solcher Nachweis jedoch der inhaltlichen Interpretation des Kalküls bedienen muss und da inhaltliche Begriffe auf Grund der von Carnap vorgenommenen Gleichsetzung von präzisen Bestimmungen mit syntaktischen nicht als präzise gelten können, beruht also die Präzision, die dadurch erreicht werden soll, dass die Logik als Kalkül behandelt wird, auf Erwägungen, die notwendigerweise unpräzise sind.

Auch die Position, die Carnap in seinen Referaten und in seinem *Metalogik* Manuskript entwickelte, ist noch mit dieser Schwierigkeit konfrontiert. In diesem Manuskript bediente sich Carnap der in Kapitel 3.3 diskutierten drei Forderungen an die Syntax, um die Form seiner Modellsprache zu rechtfertigen. Allerdings resultieren diese Forderungen aus epistemischen Einsichten und insbesondere aus Einsichten in die Grenzen der Verifizierbarkeit. Auch wenn sich alle Erkenntnistheorie auf Syntax reduziert, wie Carnap 1932 behauptete (Carnap, 1932a, S. 433), enthält diese Rechtfertigungsstrategie dennoch ein Element, dass sich nicht auf syntaktische Erwägungen reduzieren lässt: Indem Carnap forderte, dass die Syntax seiner Modellsprache diese drei Forderungen erfüllen soll, konstatierte er nicht bloss Tatsachen über die Grenzen unserer kognitiven Fähigkeiten und er beschrieb auch nicht einfach syntaktische Eigenschaften der Wissenschaftssprache. Vielmehr forderte er, dass diese Tatsachen die Gestaltung der Syntax jener Sprache zu leiten haben, und diese Forderung lässt sich nicht im Rahmen einer rein syntaktischen Betrachtung rechtfertigen. Ein syntaktischer Zugang kann einzig formale Eigenschaften von Kalkülen berücksichtigen und er kann nicht erklären, weshalb die Grenzen der Verifizierbarkeit Forderungen liefern sollten, mittels derer eine formale Version der korrekten Sprache von einem beliebigen formalen Kalkül abzugrenzen ist.

Zweitens ergibt sich aus der Annahme einer einzigen korrekten Sprache, dass auch der logisch-mathematische Teil der Modellsprache zu rechtfertigen ist. Zweifelsohne wollte Carnap eine solche Rechtfertigung im *Metalogik* Manuskript dadurch erbringen, dass er versuchte, diesen Teil seiner Sprache als analytisch zu erweisen. Dass ein Satz S analytisch ist, bedeutet aber, dass ein metalogisches Theorem der Form ‚S ist analytisch' aus den Definitionen abgeleitet werden kann, und daher ist dieser Teil der Sprache dadurch zu rechtfertigen, dass gezeigt wird, dass metalogische Theoreme einer gewissen Form aus den metalogischen Definitionen abgeleitet werden können. Wie bereits mehrfach erwähnt, wird dabei allerdings eine Hintergrundtheorie vorausgesetzt und da es diese Hintergrundtheorie gestatten muss, für jeden logisch-mathematischen Satz S der Modellsprache entweder ein Theorem der Form ‚S ist analytisch' oder ein Theorem der Form ‚S ist kontradiktorisch' zu beweisen, kann sie nicht schwächer sein als die Modellsprache selbst (Goldfarb & Ricketts, 1992, S. 70–71). Daher aber scheitert diese Rechtfertigungsstrategie: Um den logisch-mathematischen Apparat zu rechtfertigen, muss dieser bereits als korrekt vorausgesetzt werden.[78]

[78] Bereits Gödel formulierte diesen Einwand gegen die Position der *Logischen Syntax* (Gödel, 1995). Dass der Einwand die Position, die Carnap nach seinem Schritt zum Toleranzprinzip entwickelte, nicht mehr länger widerlegt, wird gezeigt in (Goldfarb & Ricketts, 1992).

4 Logizismus, Instrumentalismus und Syntax

Ich habe in Kapitel 3 untersucht, wie Carnap zwischen 1931 und 1933 eine Konzeption von Metalogik entwickelte, die es ihm erlaubte, die Diskussion aller logischen Fragen als eine Untersuchung formaler Eigenschaften von Zeichenreihen zu verstehen. In diesem Kapitel 4 werde ich aufzeigen, wie er ausgehend von seinem logizistischen Programm von 1930 die Auffassung der Mathematik entwickelte, die er dann 1934 in seiner *Logischen Syntax* verteidigte. Dabei weise ich insbesondere nach, in welchem Umfang er sich im Lauf dieser Entwicklung von Thesen distanzierte, die seine Philosophie der Mathematik vor dem im Januar 1931 gemachten Schritt zu einem metalogischen Programm prägten.

Wie in Kapitel 3.4 diskutiert, verfolgte Carnap hauptsächlich 1932 das Ziel, einen syntaktischen Ersatz zu definieren für ein bivalentes Wahrheitsprädikat für die klassische Mathematik: Mit seiner Definition von ‚analytisch‘ für die erweiterte Sprache wollte er ein Kriterium formulieren, dem genau die Sätze der erweiterten Sprache genügen, die wahren Sätzen der klassischen Mathematik entsprechen. Mit dem Schritt zum Toleranzprinzip im Herbst 1932 verlor dann zwar die klassische Mathematik ihre privilegierte Stellung als das korrekte mathematische System und die Untersuchung beliebiger syntaktisch spezifizierter Kalküle rückte ins Zentrum. Dennoch behauptete Carnap auch noch in der *Logischen Syntax*, dass die mathematischen Sätze eines jeden Kalküls analytisch oder kontradiktorisch sind (Carnap, 1934a, S. 137). Zusätzlich machte er noch immer geltend, dass diese Sätze gerade deshalb nichts über die Tatsachen besagen (ibid., S. 37).

Es kann sich daher die Vermutung aufdrängen, dass im Wesentlichen lediglich eine terminologische Differenz besteht zwischen der Position in der Philosophie der Mathematik, die Carnap 1930 verteidigt hatte, und der Position, die er in der *Logischen Syntax* vertrat: Es scheint, dass er 1934 zwar anstelle des Terminus ‚tautologisch‘ den Terminus ‚analytisch‘ verwendete, dass er aber noch immer davon überzeugt war, dass die mathematischen Theoreme mittels einer umfassenden Bestimmung des Wesens der mathematischen Wahrheit als gehaltleer zu erweisen sind.

Allerdings beruhte Carnaps Versuch von 1930, die mathematischen Wahrheiten als Tautologien zu erweisen, entscheidend auf der These, dass sich die Mathematik auf die Logik zurückführen lässt. Die tautologische Natur mathematischer Wahrheit sollte sich ja als Konsequenz aus dieser logizistischen These ergeben.[79] In der *Logischen Syntax* hingegen mass Carnap dieser These keine philosophische Signifikanz mehr bei. Er verwendete in der Konstruktion seiner beiden Beispielsprachen – der Sprachen I und II – undefinierte Zeichen

[79] Vergleiche hierzu die Diskussion in Kapitel 2.4.

und Grundsätze, die mathematischer Natur sind,[80] und er zeigte kein wirkliches Interesse mehr an der Frage, ob ein mathematisches System auf einer Basis aufgebaut wird, der er 1930 einen rein logischen Charakter zugeschrieben hätte:

> Ob man beim Aufbau … unter die Grundzeichen nur logische im engeren Sinn aufnimmt (wie Frege und Russell) oder auch mathematische (wie Hilbert), ob man als L-Grundsätze[81] nur logische im engeren Sinn oder auch mathematische aufstellt, *ist keine Frage von philosophischer Bedeutsamkeit, sondern nur eine Frage der technischen Zweckmäßigkeit*. Beim Aufbau der Sprachen I und II haben wir in diesem Punkt in Anlehnung an Hilbert das zweite Verfahren gewählt. (ibid., S. 255; Hervorhebung von mir)

In der *Logischen Syntax* gilt also die Frage, ob ein mathematischer Kalkül auf einer rein logischen Basis konstruiert werden soll oder nicht, nur noch als „eine Frage der technischen Zweckmäßigkeit“. Zudem ist die Frage zugunsten der von Hilbert vorgeschlagenen Konstruktionsweise zu entscheiden: Eine solche Sprache wie II ist der Sprache der *Principia Mathematica* vorzuziehen, weil es einfacher ist, die klassische Mathematik in einer solchen Sprache wie II aufzubauen als in einer Sprache, in der das gesamte mathematische Vokabular ausgehend von einigen wenigen logischen Zeichen definiert wird.

Im Laufe der Entwicklung, die ihn zur Position der *Logischen Syntax* führte, löste Carnap aber nicht nur die These des gehaltleeren Charakters mathematischer Wahrheiten los vom Projekt eines logizistischen Aufbaus. Mit dem Schritt zum Toleranzprinzip verlor diese These auch ihren Status als Kernelement einer umfassenden Bestimmung dessen, was die mathematischen Wahrheiten wesentlich auszeichnet. Zwar gelten auch in der *Logischen Syntax* die logisch-mathematischen Sätze eines Kalküls als gehaltleer. Der Begriff des Gehaltes selbst gilt jedoch als relativ zu einem inferentiellen System. Wird ein Satz als gehaltleer charakterisiert, so wird also lediglich seine Stellung in einem solchen System bestimmt. Daher kann es keinen sprachtranszendenten Begriff des Gehaltes geben, auf dessen Grundlage behauptet werden könnte, dass dieser gehaltleere Charakter etwas ist, das allen logisch-mathematischen Sätzen eines jeden Kalküls gemeinsam ist, und also der mathematischen Wahrheit als wesentliche Bestimmung zukommt.

[80] So gehört zum Beispiel zu den undefinierten Zeichen der Sprache I das Nullzeichen (Carnap, 1934a, S. 11–12) und zu den Ableitungsbestimmungen von I gehört das Prinzip der vollständigen Induktion (ibid., S. 29).

[81] Die L-Bestimmungen eines Kalküls sind seine logisch-mathematischen Transformationsregeln. In der *Logischen Syntax* machte Carnap geltend, dass ein Kalkül neben L-Bestimmungen auch physikalische Transformationsregeln oder P-Bestimmungen besitzen kann (Carnap, 1934a, S. 133–34).

Die Position in der Philosophie der Mathematik, die Carnap in der *Logischen Syntax* vertrat, unterscheidet sich somit deutlich von derjenigen, die er 1930 verteidigt hatte. Ausserdem gelangte er nicht dadurch zu der Position der *Logischen Syntax*, dass er sein logizistisches Programm von 1930 unter Einbeziehung einer syntaktischen Logikkonzeption und einer toleranten Einstellung gegenüber der Wahl von Sprachformen reformulierte. Vielmehr verwarf er dieses Programm Anfang 1931 auf Grund von Gödels Unvollständigkeitssatzes vollständig und entwickelte die Idee einer metalogischen Fundierung der Arithmetik. Den entscheidenden Bruch vollzog er wiederum im Januar 1931 im unpublizierten Manuskript *Versuch einer Metalogik*. Im Folgenden untersuche ich deshalb zunächst den Zugang zur Arithmetik, den Carnap im *Versuch* entwickelte. Dann diskutiere ich, in welchem Umfang er sich mit diesem metalogischen Zugang zur Arithmetik von Thesen distanzierte, die seine Philosophie in den 1920er Jahren geprägt hatten. Im Anschluss daran zeige ich auf, wie Carnap ausgehend von der Konzeption des *Versuchs* im Frühjahr 1931 eine neue Lösung der Grundlagenprobleme der Mathematik entwickelte, die er dann im Juni 1931 in seinen Referaten über Metalogik dem Wiener Kreis präsentierte. Zum Schluss diskutiere ich, wie er auf Grund der Einführung der erweiterten Sprache im Herbst 1931 und seines Schrittes zum Toleranzprinzip im Herbst 1932 zu der Position in der Philosophie der Mathematik gelangte, die sich in der *Logischen Syntax* findet.

4.1 *Versuch einer Metalogik*: ein metalogischer Zugang zur Arithmetik

Im Zentrum von Carnaps *Versuchs* stand die Idee, dass mittels einer Unterscheidung von Logik und Metalogik die Wittgensteinschen Einsichten in die Natur der logischen Wahrheit als metalogische Bestimmungen umformuliert werden können.[82] Jedoch war nur der erste Teil des Manuskripts dieser metalogischen Theorie der Tautologizität gewidmet, der zweite Teil war der Philosophie der Mathematik gewidmet, und zwar genauer der Ausarbeitung einer metalogischen Theorie der Arithmetik.[83]

Carnap begann seine Diskussion der Arithmetik im *Versuch* mit einer Bemerkung, die in aller Deutlichkeit zeigt, dass er die Idee aufgegeben hatte, dass die Arithmetik logizistisch aufzubauen ist. Er bemerkte: „Wir definieren die Summe [zweier Zahlen] *nicht* mit Hilfe der Anzahl *fremder Eigenschaften*, sondern rein figurell“ (Carnap, 1931b, S. 16). Da Frege und Russell die Addition „mit Hilfe der Anzahl“ disjunkter Eigenschaften definierten, beinhaltet diese Bemerkung also eine deutliche Absage an das Projekt einer logizistischen Reduktion.

[82] Vergleiche hierzu die Diskussion in Kapitel 3.1.

[83] Der *Versuch einer Metalogik* war ursprünglich ein 44-seitiges Manuskript. Vom zweiten Teil, der den Grundlagen der Mathematik gewidmet war, sind allerdings nur die Seiten 16–23 und die Seite 44 erhalten.

Zudem macht sie deutlich, dass an die Stelle dieses Projekts ein radikal anderes treten sollte, das die arithmetischen Grundbegriffe „rein figurell" definiert (Awodey & Carus, 2007, S. 33).

Die zentrale Idee dieses neuen Zugangs war die folgende: Carnap bediente sich im *Versuch* Punktreihen, um zwischen verschiedenen Individualzeichen zu unterscheiden. In der in diesem Manuskript konstruierten Sprache besteht jedes konstante Individualzeichen aus dem Buchstaben ‚a', gefolgt von einer Punktreihe. Verschiedene konstante Individualzeichen werden daher gebildet, indem unterschiedlich lange Punktreihen an ‚a' angehängt werden (Carnap, 1931b, S. 1–2). Diese Punktreihen, die also zur Bildung des deskriptiven Vokabulars der eigentlichen Sprache eingeführt sind, wollte Carnap nun verwenden, um arithmetische Gleichungen als metalogische Sätze über die Gleichheit von Zahlzeichen zu interpretieren.

Um dieses Ziel zu erreichen, führte Carnap zunächst die Zahlzeichen als Stellvertreter für Punktreihen ein und definierte die Addition mittels der Operation der Aneinanderreihung solcher Reihen.[84] Dann versuchte er zu zeigen, dass auf dieser Grundlage Prinzipien der primitiven rekursiven Arithmetik – insbesondere das assoziative, kommutative und distributive Gesetz der Addition – als metalogische Sätze über Zeichenreihen umformuliert werden können. So sollte zum Beispiel an die Stelle der üblichen Formulierung des kommutativen Gesetzes ‚n + m = m + n' der folgende metalogische Satz treten ‚Sind r und r' Zahlzeichen, so sind das Zeichen, das aus r besteht, gefolgt vom Additionszeichen, gefolgt von r', und das Zeichen, das aus r' besteht, gefolgt vom Additionszeichen, gefolgt von r, das gleiche Zeichen' (Carnap, 1931b, S. 21).

Mittels dieser metalogischen Reformulierungen versuchte Carnap schliesslich nachzuweisen, dass sich die arithmetischen Sätze auf Grund der eingeführten Festsetzungen beweisen lassen. Genauer versuchte er zu zeigen, dass seine metalogische Interpretation es erlaubt, arithmetische Prinzipien im Rahmen einer elementaren Theorie der Aneinanderreihung und Neuanordnung von Punktreihen zu beweisen. Ausgehend von seiner Unterscheidung von Logik und Metalogik versuchte er also, die Arithmetik auf eine kombinatorische Theorie von Punktreihen zurückzuführen und so zu begründen.

4.2 Der Wendepunkt: Gödels Unvollständigkeitsbeweis

Weshalb aber verwarf Carnap den logizistischen Zugang zu den Grundlagen der Arithmetik, den er 1930 verteidigt hatte? Am 26. August 1930 erzählte Gödel Carnap davon, dass es ihm

[84] Carnap führte zunächst das Zeichen ‚1' als Stellvertreter für diejenige Punktreihe ein, die aus einem einzigen Punkt besteht. Dann führte er das Zeichen ‚+1' durch die Festsetzung ein, dass ein Ausdruck, der aus einem Stellvertreter für eine Punktreihe r besteht, gefolgt vom Zeichen ‚+1', Stellvertreter sein soll für die Punktreihe, die aus r durch Anhängung eines weiteren Punktes entsteht. Durch diese Festsetzungen wird also für jede Punktreihe ein stellvertretender Ausdruck eingeführt, der aus dem Zeichen ‚1' durch wiederholte Anfügung des Zeichens ‚+1' gebildet ist (Carnap, 1931b, S. 16).

gelungen sei, die Unvollständigkeit des Systems der *Principia Mathematica* nachzuweisen (Dawson, 1984, S. 255). Meines Erachtens war es dieser Unvollständigkeitsbeweis, der Carnap dazu brachte, Anfang 1931 einen radikal neuen Zugang in der Philosophie der Mathematik zu entwickeln. Obwohl er zunächst Schwierigkeiten damit hatte, die technischen Details des Beweises zu verstehen, bestehen keinen Zweifel daran, dass er bald schon dessen philosophische Signifikanz erkannte (Mancosu, 1999, S. 39). Insbesondere ist es kaum zu bezweifeln, dass dieser Beweis ihn Ende 1930 davon überzeugte, dass sein Versuch, eine logizistische Theorie der mathematischen Wahrheit zu begründen, gescheitert war. In der Folge begann Carnap deshalb damit, sich mit alternativen Positionen in der Philosophie der Mathematik auseinanderzusetzen, und er erkannte schliesslich im Januar 1931, dass eine Unterscheidung von Logik und Metalogik es ihm erstens erlaubte, aus dem *Tractatus* eine Theorie der Logik zu extrahieren, und es ihm zweitens ermöglichte, arithmetische Gleichungen als Sätze über die Gleichheit von Punktreihen zu interpretieren.

Um zu verstehen, weshalb Gödels Beweis für Carnaps logizistisches Projekt von 1930 einschneidende Konsequenzen besass, muss kurz auf die zentralen Annahmen eingegangen werden, auf denen dieses Projekt basierte. Bei seinem Versuch, die Mathematik als Zweig der Logik zu erweisen, bediente sich Carnap der Sprache der einfachen Typentheorie. Die Reduktion sollte dann erbracht werden, indem erstens die mathematischen Grundzeichen in rein logischen Begriffen definiert werden und die Sprache der klassischen Mathematik also in die Sprache der einfachen Typentheorie übersetzt wird. Zweitens sollte für diese typentheoretische Sprache die Beziehung der Ableitbarkeit definiert werden, indem eine endliche Anzahl von Grundsätzen angegeben wird und eine endliche Anzahl von Schlussregeln, die bestimmen, wann aus einer endlichen Menge von Prämissen eine Konklusion abgeleitet werden darf. Schliesslich sollte drittens gezeigt werden, dass die logischen Übersetzungen der mathematischen Grundprinzipien mittels dieses Ableitungssystems bewiesen werden können.[85]

Der Versuch, dieses Programm zu verwirklichen, muss keineswegs mit hochgesteckten philosophischen Zielen verknüpft sein, noch erweist Gödels Satz ihn eindeutig als zum Scheitern verurteilt. Carnap jedoch verfolgte 1930 mit seinem logizistischen Projekt sehr wohl ambitionierte Ziele: Er akzeptierte das Bivalenzprinzip, gemäss dem jeder Satz, der sich in der Sprache der klassischen Mathematik formulieren lässt, entweder wahr oder falsch ist. Zudem wollte er ein Kriterium formulieren, dem alle und nur die Wahrheiten der klassischen Mathematik genügen. Daher benötigte Carnap ein Kriterium, das vollständig ist. Das heisst,

[85] Allerdings formulierte Carnap das Ziel seines logizistischen Projekts von 1930 nie in einer solch expliziten Weise. Ich habe in Kapitel 2.2 diskutiert, wie Carnap selbst das logizistische Programm charakterisierte.

das von ihm benötigte Kriterium musste der folgenden Bedingung genügen: Ist S ein Satz, der sich in der Sprache der klassischen Mathematik formulieren lässt, so wird das Kriterium von S oder von der Negation von S erfüllt.

Carnap versuchte 1930, ein solches Kriterium zu formulieren, indem er den Begriff der mathematischen Wahrheit mit dem Begriff der Beweisbarkeit gleichsetzte. Da er Beweisbarkeit mit Beweisbarkeit in seiner typentheoretischen Sprache gleichsetzte, scheiterte sein Projekt an Gödels Unvollständigkeitsbeweis: Mit seinem Beweis wies Gödel nach, dass für eine Vielzahl formaler Systeme, die die Zahlentheorie enthalten, Sätze konstruiert werden können, die sich in diesen Systemen formulieren lassen, die mit ihren Ableitungsverfahren aber weder bewiesen noch widerlegt werden können. Genauer wies er nach, dass in jedem ω-konsistenten formalen System[86], für welches die Relation der unmittelbaren Ableitbarkeit rekursiv definierbar ist und in dem jede rekursive Relation definiert werden kann, ein Satz S formuliert werden kann, sodass weder S noch die Negation von S in diesem System beweisbar sind (Gödel, 1931, S. 190–191).[87]

Obwohl Carnaps logizistisches Projekt an Gödels Beweis scheiterte, zeigt dieser Beweis dennoch nicht, dass jede Form eines logizistischen Programms ausgeschlossen ist. Verfolgt ein Logizist andere Ziele als eine umfassende Klärung der Natur der mathematischen Wahrheit, so ist es nicht von vornherein klar, dass er zur Erreichung seiner Ziele ein vollständiges Kriterium benötigt.[88] Zudem zeigt Gödels Beweis nur, dass es nicht gelingen kann, ein vollständiges Kriterium auf der Basis eines Ableitungsverfahrens eines bestimmen Typs zu formulieren. Zweifelsohne muss ein logizistisches System die Peano-Arithmetik enthalten. Daher erweist Gödels Beweis genau die logizistischen Systeme als unvollständig, in denen die Relation der unmittelbaren Ableitbarkeit rekursiv definierbar ist. Ende 1930 schlug Hilbert denn auch eine neue Schlussregel vor – die ω-Regel –, deren Hinzunahme zu einem in der Quantorenlogik erster Stufe formulierten System der Peano-Arithmetik ein

[86] Ein formales System S, das eine Theorie der Arithmetik enthält, heisst ω-konsistent, wenn es keine in S definierbare Klasse K gibt, so dass es 1.) für jede natürliche Zahl n in S beweisbar ist, dass $n \in K$, und 2.) es in S auch beweisbar ist, dass $\sim (n)\ (n \in K)$ (Gödel, 1931, S. 187).

[87] In seinem Aufsatz *Ein Gültigkeitskriterium für die Sätze der klassischen Mathematik* von 1935 diskutierte Carnap die Relevanz des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes für die Suche nach einem vollständigen Kriterium der mathematischen Wahrheit. Diese Diskussion zeigt nicht nur, dass er diesem Satz gerade in diesem Zusammenhang entscheidende Signifikanz beimass, sie zeigt auch, dass er der Ansicht war, dass die von Frege und Russell unternommenen Versuche, eine logische Grundlegung der Mathematik zu realisieren, an Gödels Resultat scheitern (Carnap, 1935b, S. 163–167).

[88] So kann zum Beispiel dafür argumentiert werden, dass Russells Logizismus nicht auf der These beruhte, dass sich alle mathematischen Wahrheiten aus einem einzigen logischen Axiomensystem herleiten lassen, und dass diese Position daher durch Gödels Unvollständigkeitssatz nicht widerlegt wird (Rodriguez-Consuegra, 1999, S. 326–327).

vollständiges System ergibt (Buldt, 2004, S. 228–229).[89] Ein Logizist wird also durch Gödels Beweis nicht gezwungen, die Idee zu verwerfen, dass ein vollständiges Kriterium für mathematische Wahrheit mittels einer Rückführung der Mathematik auf die Logik formuliert werden kann. Will er an dieser Idee festhalten, so zwingt ihn dieser Beweis lediglich dazu, auch solche Schlussregeln wie die ω-Regel als rein logische Regeln zu anerkennen.

Obwohl Gödels Beweis allein also keinen zwingenden Grund für eine völlige Abkehr von einem logizistischen Programm liefert, ist es dennoch verständlich, dass sich Carnap 1931 wegen dieses Beweises einem radikal neuen Zugang in der Philosophie der Mathematik zuwandte. Er sah sich ja bei der Durchführung seines logizistischen Projekts schon mit gravierenden Schwierigkeiten konfrontiert, ehe er von jenem Beweis erfuhr.[90] Dieser Beweis fügte den schon vorhandenen Schwierigkeiten eine weitere hinzu und erschütterte damit seine Hoffnung, dass der Logizismus zum Erfolg führen könnte, vollends.

Wie in Kapitel 4.6 gezeigt wird, verwarf Carnap mit seiner Abkehr vom Ziel einer logizistischen Reduktion auch die Idee, dass die reine Logik im Zusammenhang mit einer Grundlegung der Mathematik einen ausgezeichneten Status besitzt. Zudem verwarf er zunächst die Idee, dass für eine Klärung der Rolle der Mathematik in den empirischen Wissenschaften ein vollständiges Kriterium für mathematische Wahrheit notwendig ist, mittels dem sich die Mathematik als gehaltleer erweisen lässt. Der Bruch mit der Idee, dass eine logizistische Konstruktion für die Philosophie der Mathematik Relevanz besitzt, war ausserdem endgültig: Zwar verwies Carnap auch in Schriften, die er nach 1930 publizierte, wieder darauf, dass sich die klassische Mathematik in einem System der Quantorenlogik höherer Stufe aufbauen lässt, doch nach diesem Bruch spielte die Möglichkeit eines solchen Aufbaus nie wieder eine substantielle Rolle in seiner Philosophie.[91]

Daraus, dass Carnap sein logizistisches Projekt von 1930 verwarf, ergibt sich jedoch nicht, dass sich keine Kontinuitäten in der Entwicklung seiner Philosophie der Mathematik ausmachen lassen. Zwar lässt sich sowohl die von ihm 1930 versuchte Lösung des Problems, die Natur mathematischer Wahrheit zu klären, als auch seine Lösung des Problems, eine Legitimierung der klassischen Mathematik zu erbringen, nur verteidigen, wenn ein

[89] Die ω-Regel besagt, dass für jedes einstellige Prädikat φ die Formel (n) φ(n) beweisbar ist, wenn für jedes n die Formel φ(n) beweisbar ist. Hilbert schlug diese Regel an einem Vortrag im Dezember 1930 vor, publiziert wurde dieser Vortrag 1931 (Hilbert, 1931). In Carnaps Nachlass findet sich der früheste Verweis auf die ω-Regel in einer Notiz vom 12. Juli 1931 (Buldt, 2004, S. 226–229).
[90] Vergleiche hierzu die Diskussion in Kapitel 2.6.
[91] So verwies Carnap auch 1939 in seinem Buch *Foundations of Logic and Mathematics* darauf, dass ein Kalkül der klassischen Mathematik innerhalb eines Logikkalküls aufgebaut werden kann. Doch er fügte hinzu, dass die Frage, ob die Mathematik innerhalb eines solchen Kalküls aufgebaut wird oder nicht, nicht als sonderlich wichtig gelten kann (Carnap, 1939, § 20).

logizistischer Aufbau der Mathematik verwirklicht wird.[92] Doch obwohl Carnap daher diese Lösungsversuche Anfang 1931 vollständig verwarf, brach er nicht mit allen Elementen seiner früheren Philosophie der Mathematik. Berücksichtig man sein gesamtes Werk, so wird deutlich, dass das Projekt einer logizistischen Theorie der mathematischen Wahrheit keine herausragende Rolle in seiner Philosophie spielte. Zudem wird deutlich, dass er nicht die eben genannten beiden Probleme als die primären Probleme erachtete, die sich im Zusammenhang mit der Mathematik stellen. Das primäre Problem erblickte er vielmehr darin, die Rolle der Logik und der Mathematik in den empirischen Wissenschaften zu erklären. Carnaps Bruch mit dem Projekt einer logizistischen Reduktion fand denn auch vor dem Hintergrund einer wichtigen Kontinuität statt, die in einer Auffassung der Mathematik besteht, der die Mathematik als ein reines Hilfsmittel zur Transformation von empirischen Sätzen gilt.

Genauer lassen sich die folgenden Thesen vertreten: Erstens spielte das Projekt einer logizistischen Reduktion in Carnaps Arbeiten der 1920er Jahren nur eine marginale Rolle. Zweitens verfolgte Carnap auch 1930 dieses Projekt nicht in erster Linie als Selbstzweck, sondern als ein Mittel, um die These zu begründen, dass die Sätze der Mathematik blosse Hilfsmittel zur Transformation empirischer Sätze sind. Drittens wurde die Überzeugung, dass eine Version dieser These zutrifft, nicht nur von diesem Bruch nicht tangiert, sie prägte auch noch Carnaps Bild der Mathematik in der *Logischen Syntax*.[93]

Allerdings ging damit, dass Carnap sich seinem metalogischen Programm zuwandte, ein entscheidender Bruch einher. Anfang 1931 verwarf er auch die Sprachauffassung, die seine Philosophie in den 1920er Jahren geprägt hatte: die Auffassung, dass eine typentheoretische Sprache der Quantorenlogik höherer Stufe die logische Grundstruktur einer idealen Wissenschaftssprache darstellt. Mit dem *Versuch* trat an die Stelle dieser Auffassung eine Konzeption, der alle Sätze als Wahrheitsfunktionen von Atomsätzen gelten.

Im Folgenden werde ich die eben aufgestellten Thesen begründen. Dazu untersuche ich zunächst, welche Signifikanz dem Projekt einer logizistischen Reduktion in Carnaps Frühwerk zukam. Dann diskutiere ich seine instrumentalistische Auffassung der Mathematik. Zum Schluss zeige ich auf, im welchem Umfang der Schritt zu einer Sprachauffassung, die sich an derjenigen von Wittgensteins *Tractatus* orientiert, einen Bruch mit Thesen darstellte, auf denen Carnap seine Philosophie in den 1920er Jahren aufbaute.

---

[92] Vergleiche hierzu die Diskussion in den Kapiteln 2.3 und 2.4.

[93] Die Überzeugung, dass die mathematischen Sätze blosse Hilfsmittel zur Transformation von empirischen Sätzen sind, überdauerte sogar Carnaps Schritt zur Semantik im Frühjahr 1935 (Ricketts, 2007, S. 220).

4.3 Carnaps Frühwerk und das Projekt einer logizistischen Reduktion

Da ich in diesem Kapitel 4.3 dafür argumentiere, dass in Carnaps Frühwerk ein Kernelement der von Frege entwickelten logizistischen Konzeption nur eine marginale Rolle spielte, ist es unumgänglich, kurz auf einige der wichtigen Merkmale von Freges Logizismus einzugehen. In Übereinstimmung mit der von Carnap 1930 gegebenen Charakterisierung habe ich den Logizismus bisher als eine Position bestimmt, die die folgenden Thesen vertritt: 1.) Die mathematischen Begriffe lassen sich explizit in rein logischen Begriffen definieren. 2.) Die mathematischen Theoreme können aus den logischen Grundsätzen mittels logischer Deduktion abgeleitet werden. Das reduktionistische Projekt, das durch diese zwei Thesen charakterisiert wird, ist im Werk von Frege eingebettet in eine universalistische Konzeption von Logik und Sprache.[94] Frege war davon überzeugt, dass es das eine korrekte logische System gibt, das die einer allumfassenden Sprache der Wissenschaften zugrundeliegende logische Struktur darstellt. Die logischen Gesetze selbst galten ihm dabei als vollständig allgemeine Wahrheiten, die sich in jedem Gebiet der Wissenschaft anwenden lassen, um Wahrheiten mittels vollständig expliziter Schlüsse aus anderen Wahrheiten abzuleiten (Ricketts, 1996a, S. 59–60). Zusätzlich machte Frege geltend, dass die Logik gleichsam den Rahmen liefert, innerhalb dessen das von jeder Wissenschaft angestrebte Ziel eines systematischen Aufbaus überhaupt erst möglich ist (Ricketts, 1997, S. 173): Eine Systematisierung einer Wissenschaft hat durch einen axiomatischen und also durch einen logischen Aufbau im Rahmen dieser einen umfassenden Sprache zu geschehen, und zwar indem diese Wissenschaft ausgehend von den Prinzipien aufgebaut wird, die ihre letzten Geltungsgrundlagen bilden (ibid., S. 172–173). Mit seinem logizistischen Programm verfolgte Frege denn auch das Ziel, einen Aufbau der Mathematik als einer systematischen Wissenschaft zu leisten (Weiner, 2004, S. 68–69). Diese Reduktion sollte aufzeigen, auf welchen Grundbegriffen und Grundprinzipien die Mathematik beruht und wie sich ausgehend von dieser Basis die gesamte Mathematik mittels expliziter Definitionen und lückenloser Schlussketten als ein System errichten lässt, das durch die Logik allein systematisiert wird.

Gemäss einer solchen Konzeption ist die Logik also weit mehr als ein Werkzeug. Sie liefert die Prinzipien des systematischen Aufbaus. Zudem gilt der explizite Nachweis, dass sich die mathematischen Grundwahrheiten aus den logischen Prinzipien ableiten lassen, als entscheidend: Erst wenn diese Wahrheiten tatsächlich mittels lückenloser Schlussketten aus den logischen Prinzipien abgeleitet wurden, ist die Mathematik als ein System errichtet.

[94] Zu Freges universalistischer Logikkonzeption vergleiche zum Beispiel (Goldfarb, 2010; Heijenoort, 1967; Ricketts, 2010a).

In seiner Autobiographie macht Carnap geltend, dass er schon früh von Frege beeinflusst wurde (Carnap, 1963a, S. 4–6). Allerdings wandte er sich keineswegs schon in den frühen 1920er Jahren einem Projekt zu, das mit dem eben skizzierten Fregeschen vergleichbar wäre. Vielmehr erkannte er in den frühen 1920er Jahren in der modernen Logik lediglich ein Werkzeug, um Präzision in der Darstellung zu erreichen. Zudem unternahm er vor 1930 keinen Versuch, das Projekt einer systematischen Konstruktion der Mathematik tatsächlich zu verwirklichen. Dennoch beeinflusste Frege Carnap früh und direkt. Meines Erachtens ist es nämlich gerade auf den Einfluss von Frege zurückzuführen, dass Carnap zu der Überzeugung gelangte, dass die moderne Logik ein Werkzeug ist, um Präzision zu erreichen.

Carnap studierte zwischen 1910 und 1914 in Jena und also an der Universität, an der Frege zu jener Zeit ausserordentlicher Professor für Mathematik war. Neben Vorlesungen zur Mathematik hielt Frege Vorlesungen über die von ihm entwickelte Begriffsschrift. Im Wintersemester 1910–1911 besuchte Carnap eine dieser Vorlesungen und Freges Logik weckte sein Interesse. Im Sommersemester 1913 besuchte er daher auch die Vorlesung ‚Begriffsschrift II‘ und im Sommersemester 1914 noch die Vorlesung ‚Logik in der Mathematik‘ (ibid.). In diesen Vorlesungen präsentierte Frege jedoch seine Begriffsschrift nicht als die universelle Sprache, in der die logizistische Reduktion zu formulieren ist. Carnaps Mitschriften dieser drei Vorlesungen sind in seinem Nachlass bewahrt[95] und diese zeigen deutlich, dass Frege seine neue Logik auch nur als ein Werkzeug präsentierte, und zwar als ein Werkzeug, um Präzision in mathematischen Untersuchungen zu erzielen.

In den Vorlesungen ‚Begriffsschrift‘ und ‚Begriffsschrift II‘ entwickelte Frege seine symbolische Notation und zeigte, wie sie verwendet werden kann, um mathematische Begriffe – etwa den Begriff der Stetigkeit von Funktionen oder den Begriff des Grenzwertes von Funktionen – vollständig präzise zu fassen (Frege, 2004, S. 88–91). Des Weiteren führte er ein Deduktionssystem ein und illustrierte anhand von Argumenten, die in der Mathematik formuliert werden, wie diese Argumente mittels seines Systems als lückenlose Beweise rekonstruiert werden können (ibid., S. 98–102).[96] Doch auch wenn Frege die Funktion seiner Begriffsschrift an mathematischen Beispielen illustrierte, erwähnte er das logizistische Projekt seiner *Grundgesetze* mit keinem Wort. Er präsentierte lediglich ein Logiksystem, das einem auf der einfachen Typentheorie basierenden System der Prädikatenlogik höherer Stufe vergleichbar ist (Reck & Awodey, 2004, S. 29), und er verlor kein Wort über die für sein

[95] Carnaps Mitschriften von Freges Vorlesungen wurden publiziert als (Frege, 2004).

[96] Frege gab etwa einen detaillierten Beweis des Gedankens, der durch den folgenden arithmetischen Satz ausgedrückt wird ‚$(x)(x > 0 \supset (x + a > b \,.\, x + b > a)) \supset a = b$‘. In diesem Beweis verwendete er diejenigen Gedanken als Prämissen, die durch die folgenden Sätze ausgedrückt werden: ‚$(a - b) + b = a$‘, ‚$\sim (a > a)$‘, ‚$a > b \supset a - b > 0$‘, ‚$\sim (b > a) \,.\, \sim (a > b) \supset a = b$‘ und ‚$\sim (1 > 0)$‘ (Frege, 2004, S. 98–102).

logizistisches Programm zentrale Theorie der Werteverläufe.[97] Mit seinen begriffsschriftlichen Definitionen mathematischer Begriffe lieferte er auch keine Rückführung dieser Begriffe auf logische Begriffe, er führte diese Begriffe lediglich auf elementarere mathematische Begriffe zurück.[98]

Die Vorlesung ‚Logik in der Mathematik' war philosophischeren Themen gewidmet. Frege diskutierte und kritisierte darin verschiedene Positionen in der Philosophie der Mathematik. Auch entwickelte er seine Forderung, dass die gesamte Mathematik ausgehend von einigen wenigen Grundwahrheiten mittels rein logischer Deduktionen zu errichten ist. Er betonte, dass es keine der Mathematik eigentümliche Schlussweisen gibt und dass ein Aufbau, der sich einzig logischer Folgerungen bedient, entscheiden ist, wenn die letzten Wahrheiten bestimmt werden sollen, die der ganzen Mathematik zugrunde liegen (ibid., S. 137–138). Doch auch in diesem Zusammenhang unterliess er es, auf die für den Logizismus entscheidende Frage nach der Möglichkeit einer Ableitung der arithmetischen Grundwahrheiten aus logischen Prinzipen einzugehen.[99]

In den Jahren 1919 und 1920 studierte Carnap Freges *Grundgesetze* und die von Russell und Whitehead verfassten *Principia Mathematica* (Carnap, 1963a, S. 17–20). Doch auch wenn Carnap schon früh von Frege beeinflusst wurde und auch wenn er sich schon früh mit diesen Hauptwerken des Logizismus beschäftigte, galt ihm die moderne Logik in den frühen 1920er Jahren dennoch in Übereinstimmung mit der Konzeption, die Frege in seinen Vorlesungen präsentiert hatte, als ein Werkzeug, mit dem Präzision in der Darstellung zu erreichen ist. So fasste er zwar bereits 1922 den Entschluss, ein Lehrbuch der symbolischen Logik zu schreiben. Doch dieses Lehrbuch sollte keine Verteidigung des Logizismus liefern. Vielmehr sollte es eine Darstellung der Logik als eines Werkzeuges für die wissenschaftliche Philosophie sein.[100] In einem Brief an Russell vom 29. Juli 1922 führte er aus:

---

[97] Die Vermutung liegt nahe, dass Frege es deshalb unterliess, in seinen Vorlesungen auf die Theorie der Werteverläufe einzugehen, weil das System der *Grundgesetze* durch Russells Paradoxie als inkonsistent erwiesen worden war.

[98] So zielte Freges Diskussion des Stetigkeitsbegriff darauf ab, einen begriffsschriftlichen Ausdruck zu formulieren für diejenige Definition von ‚die Funktion f ist im Punkt x stetig', die sich heute in jedem Lehrbuch der Analysis findet. Die in diesem Zusammenhang relevanten Begriffe der Theorie der reellen Zahlen (zum Beispiel die Relation ‚grösser als' und die Addition) setzte er dabei voraus (Frege, 2004, S. 88–89) .

[99] Zwar wandte sich Frege mit einigen kritischen Bemerkungen gegen Weierstrass' Versuch, den Begriff der Anzahl zu definieren (Frege, 2004, S. 144–147). Diese Bemerkungen waren jedoch eingebettet in eine allgemeine Diskussion der Rolle von Definitionen in der Mathematik und Frege erwähnte die von ihm selbst versuchte Definition des Begriffs der Anzahl mit keinem Wort.

[100] Dieses Projekt, ein Lehrbuch der modernen Logik zu schreiben, verwirklichte Carnap dann mit seinem *Abriss der Logistik,* der 1929 erschienen ist. Auch im *Abriss* selbst finden sich noch deutliche Spuren dieses ursprünglichen Projekts: „Der vorliegende Abriß will nicht so sehr eine Theorie darstellen, als eine Praxis lehren. Wenn jemand auf irgendeinem Gebiet der Philosophie oder der Einzelwissenschaften sich um eine exakte Analyse der Aussagen und Begriffe bemüht, so sollen ihm hier die logistischen und insbesondere die relationstheoretischen Hilfsmittel als ein scharfes Werkzeug in die Hand gegeben werden" (Carnap, 1929, S. III).

> Ich spiele mit der Idee, eine solche Sammlung [der Definitionen und wichtigsten Theoreme des ersten Bandes der „Principia“], mit Anmerkungen als „Einführung in die Logistik“ (oder: Einführung in die mathematische Logik) zu publizieren. Diese soll nicht dazu dienen, die Mathematik auf einer logischen Basis zu konstruieren, sondern ein allgemeines Werkzeug für Logiker und Erkenntnistheoretiker liefern, das in verschiedenen Gebieten anwendbar ist. (Carnap, 1922b)

Neuere Untersuchungen haben gezeigt, dass Carnaps Frühwerk ein Versuch war, die für den Neukantianismus zentrale Frage nach der Grundlage der Objektivität wissenschaftlichen Wissens zu beantworten (Carus, 2007; Friedman, 1992; Richardson, 1998). Dieser neukantianische Hintergrund liefert auch eine Erklärung dafür, weshalb Carnap in der Logik zu dieser Zeit lediglich ein Werkzeug erblickte. In den Schriften, die er verfasste, bevor er sich dem Projekt zuwandte, das zu seinem *Logischen Aufbau der Welt* führte, entwickelte er eine Position, die als kritischer Konventionalismus bezeichnet werden kann. Diese Position beruhte auf einer scharfen Unterscheidung zwischen der subjektiven und qualitativen Sinneserfahrung, die der Ausgangspunkt aller Erkenntnis ist, und den objektiven und gesetzmässigen Strukturen, die in der mathematischen Physik beschrieben werden (Carnap, 1924, S. 106–107). Die mathematische Physik galt Carnap dabei als eine Theorie, die funktionale Abhängigkeiten zwischen quantitativen Begriffen beschreibt, und daher als eine Theorie, die mathematische Beziehungen zwischen den numerischen Werten solcher Begriffe zu ihrem Gegenstand hat (ibid., S. 107–108). Zwar schrieb er auch der Sinneserfahrung eine minimale Struktur zu, doch eben keine gesetzmässige Struktur, und er behauptete daher, dass sich die Strukturen, die die mathematische Physik beschreibt, nicht von der Erfahrung ablesen oder aus der Erfahrung mittels logischer Konstruktionen ableiten lassen (Carnap, 1923, S. 90). Zudem machte Carnap in Übereinstimmung mit Cassirer geltend, dass ein entscheidender Zusammenhang besteht zwischen der Objektivität von wissenschaftlicher Erkenntnis und der Verwendung mathematischer Strukturen in der Naturbeschreibung (Richardson, 1998, S. 120–123). Deshalb stand im Zentrum seines kritischen Konventionalismus der Versuch zu erklären, wie es möglich ist, ausgehend von der subjektiven Erfahrung zu den objektiven Strukturen der Physik zu gelangen, und wie es also möglich ist, mittels konventioneller Festsetzungen mathematisch fassbare Strukturen den in den Sinneserfahrung gegebenen Strukturen zuzuordnen. Insbesondere versuchte er zu zeigen, wie es möglich ist, quantitative Begriffe einzuführen, die ja dadurch, dass sie Objekten numerische Werte zuordnen, die Mathematik in einem Zusammenhang mit der Erfahrung bringen (Carnap, 1926).

Im Rahmen dieses kritischen Konventionalismus stellte Carnap noch keinen direkten Zusammenhang her zwischen dem Begriff der Struktur und demjenigen der Objektivität: Er schrieb auch der subjektiven Erfahrung eine gewisse Struktur zu, die in den qualitativen Relationen gründet, die die Erfahrung aufweist (Richardson, 1998, S. 181). Da die Logik die strukturellen Eigenschaften von Relationen beschreibt, stellte er also auch keinen direkten Zusammenhang her zwischen der Logik und dem Begriff der Objektivität. Vielmehr machte er geltend, dass die Mathematik selbst die im Zusammenhang mit dem Schritt von der Sinneserfahrung zur physikalischen Theorie entscheidende objektivierende Funktion spielt.

Es gibt also einen systematischen Grund dafür, dass Carnap in der modernen Logik zunächst nur ein Werkzeug erkannte, um Präzision zu erreichen, und dass er noch nicht geltend machte, dass die Logik im Zentrum der Philosophie steht: Er erachtete das Problem der Objektivität als das zentrale Problem der Philosophie, ohne aber einen Zusammenhang herzustellen zwischen Logik und Objektivität.

Allerdings scheint die eben aufgestellte Behauptung nicht damit zu vereinbaren zu sein, dass sich auch schon in Carnaps frühesten Schriften explizite Bekenntnis zum Logizismus finden.[101] Wenn die Mathematik ein Zweig der Logik ist, folgt dann nicht, dass es letztlich doch die Logik ist, die die Objektivität in der Wissenschaft garantiert und dass die Logik daher auch schon zu dieser Zeit von fundamentaler Bedeutung für Carnaps Projekt war? Dass dies nicht der Fall ist, beruht darauf, dass die logizistische Reduktion die Frage nicht beantwortet, die Carnap zu dieser Zeit als die zentrale philosophische Frage erachtete. Im Zentrum seines kritischen Konventionalismus stand das Problem, wie mathematisch fassbare Strukturen den in den Sinneserfahrung gegebenen Strukturen zugeordnet werden können. Dieses Problem versuchte Carnap dadurch zu lösen, dass er zeigte, wie die Ordnungseigenschaften, die die qualitative Erfahrung aufweist, verwenden werden können, um quantitative Begriffe einzuführen. Daher spielte die Möglichkeit eines logizistischen Aufbaus der Mathematik für sein Projekt keine Rolle: Ein solcher Aufbau zeigt ja lediglich, wie etwa die reellen Zahlen im Rahmen der einfachen Typentheorie definiert werden können, er beantwortet aber die Frage nicht, wie mittels quantitativer Begriffe mathematische Strukturen der Erfahrungswelt zugeordnet werden können. Um diese Frage zu beantworten, ist aufzuzeigen, wie ausgehend von den Ordnungseigenschaften, die die Erfahrung aufweist, Objekten reelle Zahlen zugeschrieben werden können, und das Problem, wie sich diese Zahlen selbst konstruieren lassen, ist für eine Antwort auf diese Frage irrelevant.

101 Bereits in einer seinen frühesten philosophischen Arbeiten, einem unpublizierten Aufsatz von 1920, behauptete Carnap, dass sich die gesamte Mathematik aus der reinen Logik ableiten lässt (Carus, 2007, S. 97). Eine entsprechende Behauptung findet sich auch in seinem ersten Buch *Der Raum*, das 1922 erschienen ist (Carnap, 1922a, S. 62).

Mit seinem *Logischen Aufbau der Welt*, der 1925 im Wesentlichen fertiggestellt war,[102] machte Carnap einen entscheidenden Schritt über diesen kritischen Konventionalismus hinaus. Im *Logischen Aufbau* stand nicht länger die Philosophie der Physik im Zentrum, im Zentrum stand vielmehr ein allgemeines erkenntnistheoretischen Projekt, das auf eine einheitliche Erklärung alles wissenschaftlichen Wissens abzielt (Richardson, 1997, S. 183–184). Zudem erlangte die Logik eine absolut zentrale Stellung: Im *Aufbau* gilt die logische Sprache der Typentheorie als die Sprache der Konstitutionstheorie, das heisst als die Sprache, in der jedes Konstitutionssystem aufzubauen ist, und damit als die Sprache der Wissenschaft schlechthin (Carnap, 1928, § 95).[103] Insofern die Erkenntnistheorie einen Anspruch auf Wissenschaftlichkeit hat, muss sich also auch ihr Vokabular in rein logischen Begriffe reinterpretieren lassen (Richardson, 1998, S. 183–184). Da Carnap noch immer erklären wollte, wie objektives Wissens möglich ist, sah er sich deshalb vor die Aufgabe gestellt, einen rein logischen Begriff der Objektivität zu entwickeln. Diese Aufgabe versuchte er zu lösen, indem er den Begriff der Struktur relationstheoretisch verstand (Carnap, 1928, § 12) und geltend machte, dass alles „was nicht zur Struktur, sondern zum Materialen gehört, alles, was konkret ausgewiesen wird, ... letzten Endes subjektiv“ ist (ibid., § 16). Objektive Aussagen behandeln also nur die Struktureigenschaften der Gegenstände (ibid., § 10) und daher kann jede wissenschaftliche Aussage in eine Strukturaussage transformiert werden, die sich in der rein logischen Sprache der Typentheorie formulieren lässt.[104]

Im *Logischen Aufbau* galt Carnap also die Logik nicht mehr als ein blosses Werkzeug, vielmehr galt ihm die Sprache der Logik nun als die Sprache der Wissenschaft. Zudem kam auch der logizistischen Kernthese, dass sich die gesamte Mathematik auf einer rein logischen Basis errichten lässt, in diesem Werk eine gewisse Signifikanz zu. Diese These erlaubte es Carnap nämlich, die gesamte Mathematik beim Aufbau seiner Konstitutionssysteme vorauszusetzen (ibid., § 107). Genauer erlaubte es ihm diese These, einerseits geltend zu machen, dass der im Zusammenhang mit der Objektivität wissenschaftlicher Erkenntnis

---

[102] Carnap reichte eine erste Fassung des *Logischen Aufbaus* 1925 an der Universität Wien als Habilitationsschrift ein (Mormann, 2000, S. 84).

[103] Die Konzeption von Logik, die hinter dem Projekt des *Aufbaus* stand, ist im Wesentlichen diejenige der *Principia Mathematica*. Zwar finden sich im *Aufbau* auch einige Bemerkungen zum Status der Logik, die bereits von Wittgensteins Konzeption der logischen Sätze als Tautologien inspiriert sind (Carnap, 1928, § 106). Doch eine echte Auseinandersetzung mit Wittgensteins Konzeption fehlt vollständig (Friedman, 1997, S. 22). Zudem bringen diese Bemerkungen einen kruden Konventionalismus zum Ausdruck, der für das strukturalistische Projekt des *Aufbaus* irrelevant ist.

[104] Dass sich alle empirische Wissenschaft in einer rein logischen Sprache formulieren lassen soll, mag paradox klingen. Dennoch vertat Carnap diese These im *Aufbau*. Er behauptete nämlich erstens, dass „jede wissenschaftliche Aussage grundsätzlich so umgeformt werden kann, daß sie nur noch eine Strukturaussage ist“ (Carnap, 1928, § 16). Zweitens behauptete er: „Eine reine Strukturaussage kann nur logische Zeichen enthalten, in ihr dürfen keine undefinierten Grundbegriffe irgendeines Realgebietes vorkommen“ (ibid,. § 153). Aus diesen zwei Behauptungen folgt, dass jede wissenschaftliche Ausage so umgeformt werden kann, dass sie nur noch aus logischen Zeichen besteht.

entscheidende Begriff der Struktur ein rein logischer Begriff ist, und sich andererseits der gesamten von der klassischen Mathematik bereitgestellten Begrifflichkeit zu bedienen, um wissenschaftliche Aussagen als Strukturaussagen zu reformulieren. Dennoch heisst dies nicht, dass Carnap im *Aufbau* wesentliche Elemente von Fregesche logizistischer Konzeption der Mathematik übernahm. Frege verfolgte ja mit seinem Logizismus das Ziel, die Mathematik als ein System zu errichten, und daher stand für ihn die tatsächliche Konstruktion der Mathematik auf einer logischen Basis im Zentrum. Im *Aufbau* hingegen unternahm Carnap keinen Versuch, die Mathematik als ein rein logisches System zu konstruieren. Vielmehr setzte er die Möglichkeit einer solchen Konstruktion diskussionslos voraus (ibid.).

1926 wurde Carnap Privatdozent an der Universität Wien und schloss sich dem Wiener Kreis an. In den Jahren 1926/27 lasen die Mitglieder des Wiener Kreises Wittgensteins *Tractatus* und diskutierten ihn Satz für Satz (Carnap, 1963a, S. 24; Menger, 1980, S. XII). Die Auseinandersetzung mit dem *Tractatus* brachte Carnap dazu, sich Fragen im Zusammenhang mit den Grundlagen der Logik und der Mathematik zuzuwenden. Doch es war nicht das Projekt einer logizistischen Reduktion, das in das Zentrum seines Interesse rückten. Vielmehr wandte sich Carnap dem Projekt einer allgemeinen Axiomatik zu (Awodey & Carus, 2001, S. 146). Und auch in diesem Projekt, das zwischen 1927 und 1929 sein Hauptprojekt war, spielte die Möglichkeit eines logizistischen Aufbaus der Mathematik keine Rolle. So verwies er im Manuskript *Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik* explizit darauf, dass die „Ergebnisse der folgenden Untersuchung axiomatischer Probleme" unabhängig sind von der von Frege und Russell behaupteten Rückführbarkeit der Mathematik auf die Logik (Carnap, 2000, S. 61–62).

4.4 Das Grundproblem und Carnaps Versuch einer Lösung

In Kapitel 4.3 habe ich erstens für die folgende Behauptung argumentiert: Die logizistische These, dass sich die Mathematik aus der Logik ableiten lässt, spielte in Carnaps Arbeiten der 1920er Jahren nur eine marginale Rolle. Einzig im *Logischen Aufbau* bediente er sich dieser These, um weitere philosophische Thesen zu stützen. Ausserdem unternahm er in diesen Jahren keinen Versuch, den für Freges Logizismus zentralen Nachweis zu erbringen, dass sich die mathematischen Grundsätze tatsächlich aus logischen Prinzipien ableiten lassen. Er begnügte sich damit darauf hinzuweisen, dass eine solche Ableitung möglich ist. Zweitens habe ich gezeigt, dass Carnaps Frühwerk ein Versuch war nachzuweisen, dass der Mathematik (bzw. der Logik) im Zusammenhang mit der in den empirischen Wissenschaften angestrebten Objektivität eine zentrale Rolle zukommt. Drittens habe ich bereits in Kapitel 2.7 gezeigt, dass Carnap 1930 nachweisen wollte, dass die logizistischen Definitionen es erlauben, die mathematischen Sätze als Hilfsmittel zur Transformation von Wirklichkeitssätzen zu erweisen.

Es drängt sich aus diesen Gründen die folgende Vermutung auf: Carnap erachtete nicht eine Klärung der Natur mathematischer Wahrheit oder eine Legitimierung der Mathematik als die primären philosophischen Probleme, die sich im Zusammenhang mit der Mathematik stellen. Vielmehr erblickte er das Grundproblem darin zu erklären, welche Rolle die Mathematik in den empirischen Wissenschaften spielt. Weitere Belege für diese Vermutung liefern zwei Bemerkungen, die sich in Carnaps Autobiographie finden. Die erste dieser Bemerkungen ist die folgende: „Since Schlick and I came to philosophy from physics, we looked at mathematics always from the point of view of its application in empirical science" (Carnap, 1963a, S. 48). Die zweite Bemerkung lautet:

> ... the following conception, which derives essentially from Frege, seemed to me of paramount importance: It is the task of logic and of mathematics within the total system of knowledge to supply the forms of concepts, statements, and inferences, forms which are then applicable everywhere, hence also to non-logical knowledge. It follows from these considerations that *the nature of logic and mathematics can be clearly understood only if close attention is given to their application in non-logical fields, especially in empirical science*." (Carnap, 1963a, S. 12, Hervorhebung von mir)

Es ist daher kaum zu bezweifeln, dass für Carnap stets die Frage nach der Rolle der Logik und der Mathematik in den empirischen Wissenschaften das primäre Problem war. Zwar versuchte er 1930, die logizistische Reduktion dazu zu verwenden, um das Wesen der mathematischen Wahrheit zu klären. Eine solche Klärung strebte er zudem 1932 mit seinem Versuch an, einen syntaktischen Ersatz für ein bivalentes Wahrheitsprädikat für die klassische Mathematik zu definieren.[105] Doch meines Erachtens versuchte Carnap auch 1930 und 1932 eine solche Klärung in erster Linie deshalb zu liefern, um dadurch das Problem der Anwendbarkeit lösen zu können: Er war davon überzeugt, dass eine scharfe Unterscheidung zwischen den logisch-mathematischen und den empirischen Sätzen benötigt wird, wenn dieses Problem gelöst werden soll. Und mit seiner Klärung des Begriffs der mathematischen Wahrheit verfolgte er das Ziel, diese Unterscheidung präzise zu artikulieren. Bemerkungen, die Carnap 1930 machte, liefern sogar Belege dafür, dass er auch zu dieser Zeit das Problem der Anwendbarkeit als das primäre Problem erachtete: Erstens behauptete er explizit, dass es

[105] Ich werde in Kapitel 4.7 auf die Frage eingehen, welchen Status die These, dass die logisch-mathematischen Sätze eines Kalküls in diesem Kalkül analytisch oder kontradiktorisch sind, in der *Logischen Syntax* hat.

der „eigentliche Sinn“ des logisch-mathematischen Systems ist „anzugeben, wie Schlüsse gezogen werden können, d.h. welche Transformationen zulässig sind“ (Hahn et. al, 1931, S. 141). Zweitens kritisierte er die Formalisten nicht deshalb, weil sie eine rein formale Konstruktion anstrebten, die jede Bezugnahme auf die Bedeutung der mathematischen Zeichen vermeidet. Einen solchen Aufbau der Mathematik erachtete er durchaus als zulässig. Er kritisierte die Formalisten einzig aus dem Grund, weil sie es unterliessen, die Rolle der Mathematik in den empirischen Wissenschaften zu erklären (ibid., S. 141–142).

Wenn davon ausgegangen wird, dass Carnap die Frage nach der Anwendbarkeit der Mathematik als die primäre Frage erachtete, so kann zusätzlich geltend gemacht werden, dass sich in der Entwicklung seiner Philosophie der Mathematik eine entscheidende Kontinuität ausmachen lässt: Während eines Grossteils seiner intellektuellen Karriere war Carnap nämlich davon überzeugt, dass die Logik und die Mathematik blosse Hilfsmittel zur Transformation von empirischen Sätzen sind. Genauer war er davon überzeugt, dass die Rolle der Logik und der Mathematik in den empirischen Wissenschaften zu verstehen ist auf der Grundlage einer Unterscheidung zwischen den eigentlichen Sätzen, die die Theorien der empirischen Wissenschaften ausmachen, und den uneigentlichen Sätzen oder Hilfssätzen, die in der Logik und in der Mathematik formuliert werden und deren Funktion sich darin erschöpft, ein Hilfsmittel zu liefern für die Ableitung von eigentlichen Sätzen aus eigentlichen Sätzen.

Allerdings verteidigte Carnap in seinen frühen Schriften noch keine solche instrumentalistische Konzeption der Mathematik. Obwohl er auch schon in diesen Schriften das Problem der Anwendung der Logik und der Mathematik ins Zentrum stellte, behauptete er noch nicht, dass die Logik und die Mathematik ein reines Instrument der Deduktion ist: In seinen neukantianischen Schriften und im *Logischen Aufbau* machte er ja noch geltend, dass die Mathematik (bzw. die Logik) objektives Wissen überhaupt erst ermöglicht. Dennoch wandte er sich bereits früh einer solchen instrumentalistischen Auffassung zu. So bemerkte er etwa in seinem Aufsatz *Eigentliche und Uneigentliche Begriffe*, den er 1927 publizierte: „Die Formalbegriffe (logische und arithmetische Begriffe) dienen nur als Hilfsmittel zur Darstellung der Erkenntnis von Realbegriffen; die sog. Erkenntnisse von Formalbegriffen (z.B. mathematische Erkenntnisse) sind Tautologien“ (Carnap, 1927, S. 373).

Es ist zu vermuten, dass es dem Einfluss von Wittgensteins *Tractatus* zuzuschreiben ist, dass Carnap eine instrumentalistische Konzeption zu entwickeln begann. Diese Vermutung ist insbesondere aus den folgenden zwei Gründen plausibel. Die intensive Lektüre des *Tractatus* in den Jahren 1926/1927 hatte erstens einen entscheidenden Einfluss auf Carnaps Denken und im *Tractatus* finden sich Bemerkungen, in denen eine solche Auffassung der Mathematik ausgedrückt wird:

> Im Leben ist es ja nie der mathematische Satz, den wir brauchen, sondern wir benützen den mathematischen Satz *nur*, um aus Sätzen, welche nicht der Mathematik angehören, auf andere zu schließen, welche gleichfalls nicht der Mathematik angehören. (6. 211)

Zweitens brachte die Lektüre des *Tractatus* Carnap dazu, die neukantianische These zu verwerfen, dass der Mathematik (bzw. der Logik) eine objektivierende Funktion zukommt. Dieses Buch brachte ihn dazu, eine verifikationistische Theorie der Bedeutung zu akzeptieren und also eine Bedeutungstheorie, der gemäss ein grundsätzliche Differenz besteht zwischen den Sätzen der empirischen Wissenschaften und den logisch-mathematischen Sätzen (Friedman, 1987, S. 538–539).[106]

Meines Erachtens ist also Carnaps gesamte Philosophie der Logik und der Mathematik ab 1927 vom Bemühen geprägt, diese von Wittgenstein inspirierte Unterscheidung zwischen den eigentlichen Sätzen der empirischen Wissenschaften einerseits und den Hilfssätzen der Logik und der Mathematik andererseits präzise zu artikulieren. Die unterschiedlichen Programme, die Carnap in der Philosophie der Logik und der Mathematik verfolgte, können deshalb als verschiedene Versuche gelten, diese Unterscheidung präzise zu fassen. Somit stellt auch sein Bruch mit dem Projekt einer logizistischen Reduktion nicht ein solch fundamentaler Einschnitt dar, wie man zunächst annehmen könnte. Die Position in der Philosophie der Mathematik, die Carnap 1934 in der *Logischen Syntax* entwickelte, kann dann nämlich als Kulminationspunkt des Projektes gelten, eine solch instrumentalistische Auffassung der Logik und der Mathematik zu artikulieren und zu begründen.

Welche Position verteidigte Carnap also in der *Logischen Syntax*? In diesem Buch versuchte er zu zeigen, dass die logisch-mathematischen Sätze deshalb blosse Hilfsmittel sind, weil sie einzig dazu dienen, dasjenige, was im inferentiellen System einer Sprache implizit enthalten ist, explizit zu artikulieren. In seinem Aufsatz *Formalwissenschaft und Realwissenschaft*, der 1935 erschienen ist, brachte er diese Auffassung so auf den Punkt:

> Die Verwendung der analytischen und der synthetischen Sätze in der Wissenschaft ist die folgende. Der Realwissenschaftler stellt synthetische Sätze auf, z.B. singuläre Sätze zur Beschreibung beobachteter Tatsachen oder generelle Sätze, die als Hypothesen aufgestellt und versuchsweise verwendet werden. Aus den aufgestellten

[106] Es ist höchst fraglich, ob Wittgenstein im *Tractatus* tatsächlich so etwas wie eine verifikationistische Theorie der Bedeutung vertreten hat (Hymers, 2005). Dennoch verstanden die Mitglieder des Wiener Kreises den *Tractatus* so, dass er eine solche Theorie enthält. In seiner Autobiographie bezeichnet Carnap zum Beispiel die Idee, dass die Bedeutung eines Satzes die Methode seiner Verifikation ist, als „Wittgenstein’s principle of verifiability“ (Carnap, 1963a, S. 45).

Sätzen will nun der Wissenschaftler andere synthetische Sätze erschließen, z.B. um Voraussagen über die Zukunft zu machen. Die analytischen Sätze dienen als Hilfsmittel für diese Schlußoperationen. Die gesamte Logik, einschließlich der Mathematik, ist, vom Gesichtspunkt der Gesamtsprache aus betrachtet, nichts anderes als ein Hilfskalkül zur Behandlung der synthetischen Sätze. Die Formalwissenschaft hat keine selbständige Bedeutung, sondern ist ein aus technischen Gründen in die Sprache eingefügter Hilfsbestandteil, der die für die Realwissenschaft erforderlichen sprachlichen Umformungen technisch erleichtert. (Carnap, 1935a, S. 35)

Gemäss der von Carnap in der *Logischen Syntax* vertretenen Form einer instrumentalistischen Position ist also die „gesamte Logik, einschließlich der Mathematik" lediglich ein „Hilfskalkül", der „keine selbständige Bedeutung" hat und der einzig aus „technischen Gründen in die Sprache" der Wissenschaft eingefügt ist. Dementsprechend wäre es prinzipiell möglich, in den empirischen Wissenschaften eine Sprache zu verwenden, die keine logisch-mathematischen Sätze enthält, sondern ausschliesslich synthetische Sätze (ibid., S. 32). Genauer machte Carnap geltend, dass jede Wissenschaftssprache S, die logisch-mathematische Sätze enthält, in eine Sprache S' umgeformt werden kann, so dass S und S' die folgenden Bedingungen erfüllen: 1.) S' enthält keine analytischen Sätze und also insbesondere keine logisch-mathematischen Sätze. 2.) S und S' enthalten dieselben synthetischen Sätze. 3.) Ist ein synthetischer Satz p in S aus einer Menge M von synthetischen Sätzen ableitbar, so ist p auch in S' aus M ableitbar. Dabei kann eine solche Sprache S' aus einer Sprache S konstruiert werden, indem das System der Umformungsregeln von S durch zusätzliche logisch-mathematische Umformungsregeln zu einem umfassenderen System ergänzt wird, das es gestatten, in S' alle diejenigen Transformationen durchzuführen, die in S unter Verwendung logisch-mathematischer Sätze als Hilfsprämissen durchgeführt werden können (ibid., S. 32–34). Allerdings ist eine solche Sprache S' komplizierter als eine Sprache, die auch logisch-mathematische Sätze enthält,[107] und daher wäre die Verwendung einer solchen Sprache S' in den empirischen Wissenschaften unzweckmässig. Auch wenn also eine Wissenschaftssprache prinzipiell ohne logisch-mathematische Sätze auskommen könnte und auch wenn diese Sätze daher reine Hilfsmittel sind, vereinfacht die Einführung dieser Sätze

[107] Ein Nachteil, der eine solche Sprache S' gegenüber einer Sprache S hat, besteht darin, dass die Definition von ‚Satz' für S' eine sehr viel kompliziertere Form annehmen muss als für S (Carnap, 1935a, S. 34–35). Dies lässt sich anhand einer Sprache der Aussagenlogik verdeutlichen: In einer Formulierung einer solchen Sprache, die analytische Sätze zulässt, kann der Begriff des Satzes definiert werden, indem zunächst die einfachsten Sätze charakterisiert werden und dann eine Reihe von Konstruktionen angegeben werden, die aus Sätzen stets neue Sätze erzeugen. In einer Formulierung, die keine analytischen Sätze zulässt, ist dies nicht möglich. Denn dann werden zwar p, q, ~p, p v q als Sätze gelten dürfen, p v ~p jedoch nicht.

den Aufbau der Wissenschaftssprache. Daher ist ein Aufbau, der solche Sätze als Hilfsprämissen der Deduktion zulässt, aus Gründen der Zweckmässigkeit vorzuziehen.

Zwei ergänzende Bemerkungen mögen helfen, die von Carnap vertretene instrumentalistische Position genauer zu charakterisieren. Erstens galt ihm einzig die Verwendung logisch-mathematischer Sätze als prinzipiell verzichtbar in einer Wissenschaftssprache: In den empirischen Wissenschaften erklären wir bekannte Tatsachen und sagen unbekannte Tatsachen vorher (Carnap, 1939, § 1). Wir leiten also konkrete Sätze, die diese Tatsachen beschreiben, aus allgemeinen Sätzen und weiteren konkreten Sätzen ab (Carnap, 1934a, S. 247). Daher muss jede Wissenschaftssprache Transformationsregeln besitzen, die bestimmen, wann ein synthetischer Satz aus einer Menge von synthetischen Sätzen abgeleitet werden kann. Diese Transformationsregeln definieren allererst das inferentielle System, das in jeder Ableitung vorausgesetzt ist. Ohne solche Regeln bliebe nur ein Sprachfragment, das isolierte synthetische Sätze umfasst, die in keinem Zusammenhang zueinanderstehen. Da die Logik und die Mathematik auch dieses inferentielle System liefern, wollte Carnap also keineswegs zeigen, dass die Logik und die Mathematik überhaupt prinzipiell verzichtbar sind. Die oben diskutierte Möglichkeit der Konstruktion einer Sprache S' aus einer Sprache S zeigt denn auch nicht, dass die Logik und die Mathematik überhaupt verzichtbar sind. Denn S und S' beruhen ja beide auf inferentiellen Systemen. Die Möglichkeit einer solchen Konstruktion zeigt nur, dass diese Disziplinen überhaupt nur ein inferentielles System liefern. Sie zeigt, dass die logisch-mathematischen Sätze einer Sprache, die mit den synthetischen Sätzen der Sprache auf derselben Stufe zu stehen scheinen, nur die Funktion eines Deduktionsinstruments besitzen.

Zweitens machte Carnap in der *Logischen Syntax* geltend, dass beim Aufbau einer Wissenschaftssprache auch physikalische Gesetze in das inferentielle System der Sprache eingegliedert werden können (ibid., S. 133–135). Denn wie die logisch-mathematischen Sätze können auch die physikalischen Gesetze als Hilfsmittel der Deduktion verstanden werden, die es erlauben, aus gewissen konkreten Sätzen andere konkrete Sätze abzuleiten. Daher lässt sich die Rolle der logisch-mathematischen Sätze in einer Wissenschaftssprache nicht vollständig durch den Hinweis klären, dass diese Sätze blosse Hilfsmittel der Deduktion sind.

Allerdings besteht auch in einer Sprache, deren inferentielles System physikalische Gesetze umfasst, ein entscheidender Unterschied zwischen den physikalischen Transformationsregeln und den logisch-mathematischen Umformungsbestimmungen: Durch die Einführung von physikalischen Umformungsregeln werden Komponenten einer empirischen Theorie in das inferentielle System der Sprache integriert und diese Regeln ermöglichen daher die Ableitung von synthetischen Sätzen, deren Gehalt nicht vollständig im

Gehalt der Prämissen enthalten ist. Obwohl die physikalischen Gesetze auch als Hilfsmittel der Deduktion verstanden werden können, unterscheiden sie sich daher dennoch von den logisch-mathematischen Sätze. Denn die logisch-mathematischen Sätze sind reine Hilfsmittel für Transformationen, die zu keiner Vermehrung des Gehaltes führen.

4.5 Von der einfachen Typentheorie zur Sprachauffassung des *Versuchs*

Ich habe im Kapitel 4.3 dafür argumentiert, dass das Projekt einer logizistischen Reduktion in Carnaps Arbeiten der 1920er Jahren noch keine herausragende Rolle spielte. In Kapitel 4.4 habe ich ausgehend von dieser Behauptung dafür argumentiert, dass der Bruch mit diesem Projekt vor dem Hintergrund einer entscheidenden Kontinuität stattfand. Allerdings war Carnaps Philosophie vor dem im Januar 1931 gemachten Schritt zu einem metalogischen Programm durchaus entscheidend von Frege und Russell geprägt und daher stellt dieser Schritt dennoch einen signifikanten Einschnitt in seiner philosophischen Entwicklung dar. Im *Versuch* entwickelte Carnap eine wahrheitsfunktionale Sprachkonzeption, der gemäss jeder Satz der eigentlichen Sprache eine Wahrheitsfunktion der Atomsätze ist. Damit hatte er eine der zentralen Ideen seiner früheren Arbeiten verworfen. In Anlehnung an Frege und insbesondere an Russell hatte er noch bis 1930 geltend gemacht, dass die einfache Typentheorie die jeder allumfassenden Wissenschaftssprache zugrundeliegende logische Struktur darstellt: Carnap versuchte 1930, die logizistische Reduktion in einer solchen typentheoretischen Sprache zu formulieren.[108] Zudem bildete eine solche Sprachkonzeption schon den Hintergrund seiner beiden Hauptprojekte in den 1920er Jahren, des Projekts des *Logischen Aufbaus* und des Projekts einer allgemeinen Axiomatik.

Im *Logischen Aufbau* liefert die einfache Typentheorie den Rahmen, innerhalb dessen alle Konstitutionssysteme zu konstruieren sind: Allen möglichen Konstitutionssystemen liegt eine typentheoretische Struktur zugrunde und diese Konstitutionssysteme selbst können als unterschiedliche ontologische Interpretationen dieser einen grundlegenden Struktur angesehen werden (Ricketts, 2010b, S. 313–314). Die logische Struktur der Typentheorie repräsentiert somit dasjenige, was allen Konstitutionssystemen und also allen möglichen Begriffssystemen der Wissenschaft gemeinsam ist. Daher bildet die Typentheorie im *Aufbau* den logischen Rahmen, innerhalb dessen wissenschaftliche und damit sinnvolle Aussagen überhaupt erst möglich sind.

Auch das Projekt einer allgemeinen Axiomatik basierte auf dieser Idee. Mit seiner allgemeinen Axiomatik wollte Carnap eine „Theorie der allgemeinen, logisch-formalen Eigenschaften von Axiomensystemen und der Beziehungen zwischen Axiomensystemen“

[108] Vergleiche hierzu die Diskussion in 4.2.

aufbauen (Carnap, 2000, S. 59). Die Sprache, in der diese allgemeine Theorie axiomatischer Systeme formuliert werden sollte, war wiederum die Sprache der einfachen Typentheorie: Carnap ging von der Annahme aus, dass Axiomensysteme als Aussagefunktionen zweiter Stufe aufgefasst werden können (ibid., S. 87–88). Dann versuchte er ausgehend von dieser Annahme zu zeigen, dass die allgemeine Axiomatik als ein Teilgebiet der Theorie der Aussagefunktionen aufgefasst werden kann und dass sich also auch Hilberts Beweistheorie in der einen Sprache der einfachen Typentheorie formulieren lässt.[109]

Obwohl Carnap die verzweigte Typentheorie der *Principia Mathematica* nicht akzeptierte und durch eine einfache Typentheorie ersetzte,[110] war die Sprachauffassung, die der Hintergrund all seiner philosophischen Hauptprojekte vor 1931 bildete, also dennoch entscheidend von Russells Konzeption inspiriert.[111] Tatsächlich übernahm er von Russell sogar die Idee, dass die grundlegende typentheoretische Struktur ein hierarchisches System von Aussagefunktionen ist, dass das mengentheoretische Vokabular also derivativ ist und zu definieren unter Bezugnahme auf Aussagefunktionen (Carnap, 1928, § 33; 1929, § 8; Ricketts, 2010b, S. 322–323).

Im *Versuch* konstruierte Carnap jedoch eine Sprache, die gemäss einer typentheoretischen Sprachauffassung einzig ein Sprachfragment ist, das aus der Sprache dadurch entsteht, dass nur Quantifikationen über Individuen und keine Variablen von einem höheren als dem zweiten Typ zugelassen werden.[112] Auch wenn dieses Fragment in etwa einer Sprache der Quantorenlogik erster Stufe entspricht, kann die Beschränkung auf dieses Fragment im Rahmen einer typentheoretischen Konzeption dennoch nur als unbegründet gelten: In einer typentheoretischen Sprache kann es keine Variablen gegeben, deren Werte alle Entitäten überhaupt sind. Die hierarchische Struktur wird ja eingeführt, um die Werte der Variablen auf die Elemente eines gewissen Typs zu beschränken. Daher kann die Beschränkung auf eine Sprache der Quantorenlogik erster Stufe überhaupt nur als Hervorhebung eines Sprachfragments gelten, mittels dem zwar die Entitäten eines einzigen Typs beschrieben

[109] Vergleiche hierzu die Diskussion in Kapitel 2.8.

[110] Auch wenn es Carnap im *Logischen Aufbau* unterliess, eine detaillierte Darstellung des logischen Systems zu geben, innerhalb dessen er seine Konstitutionssysteme formulieren wollte, lässt es sich dennoch kaum bezweifeln, dass er sich auch schon in diesem Buch der einfachen und nicht der verzweigten Typentheorie als logischer Hintergrundtheorie bedienen wollte (Richardson, 1998, S. 7, insb. Fussnote 5). In späteren Arbeiten verwarf Carnap dann die verzweigte Typentheorie explizit (Carnap, 1929, § 9; 2000, S. 68–70).

[111] Tatsächlich benützten von den 1910er Jahren bis in die 1930er Jahren die meisten Logiker, die sich mit den Grundlagen der Mathematik und der axiomatischen Methode beschäftigten, eine Version der Typentheorie, so etwa auch Hilbert, Gödel und Tarski. Zunächst bediente man sich der in den *Principia* entwickelten verzweigten Typentheorie, in den 1920er Jahren trat dann die einfache Typentheorie an ihre Stelle. Erste Ansätze zu einer einfachen Typentheorie entwickelte Ramsey (Ramsey, 1926). Die erste präzise und umfassende Darstellung einer einfachen Typentheorie gab Carnap 1929 in seinem *Abriss der Logistik* (Awodey & Reck, 2002, S. 20).

[112] Da in einem solchen Fragment nicht über die Variablen des zweiten Typs quantifiziert werden kann, haben diese Variablen lediglich den Status von Platzhaltern, für die konstante Prädikate der Sprache eingesetzt werden können.

werden können, das aber die Mittel nicht bietet, die notwendig wären, um auch die Entitäten anderer Typen berücksichtigen zu können (Goldfarb, 1979, S. 352).

Für Carnap jedoch stellte die Sprache, die er im *Versuch* konstruierte, nicht ein Sprachfragment dar, dessen isolierte Betrachtung einzig dadurch gerechtfertigt ist, weil sich an ihm die metalogischen Methoden besonders einfach veranschaulichen lassen. Vielmehr entwickelte er in diesem Manuskript die Idee, dass die Sprache der Wissenschaft wesentlich eine wahrheitsfunktionale Sprache ist, in der alle Sätze mittels wahrheitsfunktionaler Operationen aus den Atomsätzen konstruiert werden. Anfang 1931 hatte Carnap also seine frühere von Russell inspirierte typentheoretische Konzeption verworfen und er versuchte, die einer idealen Sprache zugrundeliegende logische Struktur in Anlehnung an Wittgensteins *Tractatus* neu zu bestimmten. Wie ich in Kapitel 3 gezeigt habe, kulminierte dieses Bemühen um eine Neubestimmung der logischen Struktur der Wissenschaftssprache in der Konstruktion der Modellsprache im Sommer 1931: Mit der Modellsprache, die Carnap in seinen Referaten über Metalogik präsentierte, glaubte er wieder, die der idealen Wissenschaftssprache zugrundeliegende logische Struktur bestimmt zu haben.

Weshalb aber verwarf Carnap im *Versuch* seine frühere typentheoretische Konzeption? Meines Erachtens lassen sich zwei Gründe dafür anführen, dass er diesen Schritt machte. Der erste Grund ist der folgenden: Wie in Kapitel 2.6 gezeigt, bestand im Rahmen von Carnaps logizistischem Programm eine Spannung zwischen seinem Wittgensteinschen Begriff der Tautologie und seiner These, dass diejenigen logischen Grundsätze Tautologien sind, die benötigt werden, um die Mathematik auf die Logik zurückführen. Um diese These verteidigen zu können, hätte Carnap einen Begriff der Tautologie benötigt, der deutlich umfassender ist als derjenige, den er 1930 in Anlehnung an den *Tractatus* unter Verwendung von Wahrheitstafeln einführte. Es liegt auf der Hand, dass die Beschränkung auf eine Sprache der Quantorenlogik erster Stufe mit substitutionell gedeuteten Quantoren es Carnap erlaubte, eine grundsätzliche Erweiterung des Begriffs der Tautologie nicht mehr länger für notwendig zu erachten.[113] Diese Beschränkung erlaubte es ihm, eine streng wahrheitsfunktionale Auffassung zu entwickeln, und also zu behaupten, dass die Sprache ein System von Sätzen ist, deren grundlegende semantische Eigenschaft diejenige ist, Wahrheitsbedingungen zu haben. Da er zudem den Schritt zu einer solchen Sprachauffassung mit einer Unterscheidung von Logik und Metalogik kombinierte, konnte er nun die im *Tractatus* gegebenen Erläuterungen

[113] Allerdings erweiterte Carnap mit dem *Versuch* seine frühere Konzeption von Tautologizität. Während er 1930 den Begriff der Tautologie lediglich für Wahrheitsfunktionen mit endlich vielen Argumenten definierte, führte er im *Versuch* einen Begriff ein, dem gemäss auch Existenzquantifikationen über abzählbare Bereiche als tautologisch gelten können. Vergleiche die Diskussion in den Kapiteln 2.6 und 3.1.

des Begriffs der Tautologie verwenden, um eine umfassende und präzise formulierte Theorie der logischen Wahrheit für seine eigentliche Sprache zu formulieren.

Doch auch wenn die Verwerfung einer typentheoretischen Konzeption offenkundige Vorteile mit sich brachte, scheint eine streng wahrheitsfunktionale Konzeption die Konsequenz nach sich zu ziehen, dass sich die arithmetischen Sätze nicht mehr länger formulieren lassen. Mittels seiner Unterscheidung von Logik und Metalogik glaubte Carnap aber, auch diese Schwierigkeit lösen zu können. Wie in Kapitel 4.1 diskutiert, reinterpretierte er ja im *Versuch* die arithmetischen Sätze als kombinatorische Aussagen über Zeichenreihen. Daher konnte er einerseits behaupten, dass alle Sätze seiner eigentlichen Sprache Wahrheitsfunktionen der Atomsätze sind, und andererseits behaupten, dass sich die arithmetischen Sätzen im Rahmen der metalogischen Theorie formulieren lassen, mit der diese Sprache beschrieben wird.[114]

Meines Erachtens gab es jedoch noch einen zweiten Grund dafür, dass Carnap seine typentheoretische Konzeption verwarf. Wie Quine bemerkte, gilt ja: „Classical mathematics ... is up to its neck in commitments to an ontology of abstract entities“ (Quine, 1948, S. 32). Insbesondere scheinen wir uns bereits mit der Peano-Arithmetik auf die Existenz natürlicher Zahlen und also auf eine Ontologie abstrakter Gegenstände festzulegen. Lässt sich die Mathematik logizistisch aufbauen, so ist zwar gezeigt, dass sich alle mathematischen Existenzbehauptungen als Quantifikationen über Aussagefunktionen reformulieren lassen und dass also die in der Mathematik vorausgesetzte Ontologie neben Aussagefunktionen keine weiteren Entitäten umfassen muss. Doch da Aussagefunktionen auch abstrakte Entitäten sind, zeigt die logizistische Reduktion nicht, dass auf eine Ontologie abstrakter Entitäten verzichtet werden kann. Ein Positivist kann sich deshalb nicht mit der Behauptung begnügen, dass sich die Mathematik auf die Logik zurückführen lässt. Denn er will ja nachweisen, dass die Mathematik nur scheinbar eine Ontologie abstrakter Entitäten voraussetzt. Carnap versuchte daher 1930 auch nicht, diesen Nachweis durch die logizistische Reduktion zu erbringen, sondern durch den Nachweis, dass die mathematischen Wahrheiten Tautologien sind: Denn sind diese Wahrheiten Tautologien, so sind sie ohne jeden Gehalt. Und da Sätze, die keinen Gehalt haben, auch nicht Eigenschaften abstrakter Entitäten beschreiben, macht die Mathematik dann auch keine ontologischen Voraussetzungen (Carnap, 1928, § 107).

Wie in Kapitel 4.2 gezeigt, gelangte Carnap Ende 1930 auf Grund von Gödels Unvollständigkeitssatz zur Überzeugung, dass sein Versuch, die mathematischen Wahrheiten

[114] Ich habe in Kapitel 3.1 diskutiert, dass Carnap es im *Versuch* unterliess, den Status seiner Metalogik zu klären. Dieses Manuskript lässt daher auch die Frage offen, welchen Status die arithmetischen Sätze, die ja metalogische Sätze sein sollen, genau haben und in welcher Beziehung sie zu den Sätzen der eigentlichen Sprache stehen.

als Tautologien zu erweisen, gescheitert war. Daher sah er sich mit einem gravierenden Problem konfrontiert: Er konnte den tautologischen Charakter der Mathematik nicht mehr als gesichert ansehen und war also nicht mehr in der Lage, seine typentheoretische Konzeption als ontologisch harmlos einzustufen. Seine Verwendung einer typentheoretischen Sprache mit der zugrundeliegenden Hierarchie abstrakter Entitäten schien ihn nun auf genuine ontologische Annahmen festzulegen. Also hatte er diese Konzeption zu verwerfen.

Meines Erachtens verwarf Carnap also seine typentheoretische Sprachkonzeption auch aus dem Grund, weil ihn Gödel Unvollständigkeitssatz davon überzeugt hatte, dass sein Projekt gescheitert war, die ontologischen Implikationen seines logizistischen Programms mittels des Begriffs der Tautologie als scheinbare zu erweisen. Daher brauchte er eine neue Konzeption von Logik und Sprache und im *Versuch* glaubte er, eine solche Konzeption ausgehend vom *Tractatus* entwickeln zu können: Im Unterschied zu der von reichen ontologischen Annahmen durchzogenen Sprache der Typentheorie enthält die Sprache des *Versuchs* keine über die Existenz von Individuen hinausgehenden ontologischen Festlegungen mehr. Diese Sprache führt daher nicht mehr zu den Schwierigkeiten, die Gödels Unvollständigkeitssatz für Carnaps typentheoretische Konzeption aufgeworfen hatte.

Für die These, dass die eben diskutierte Problematik einer der Gründe dafür war, dass Carnap seine typentheoretische Konzeption Ende 1930 verwarf, spricht insbesondere der folgende Umstand. Anfang 1931 wandte er sich in der Philosophie der Mathematik Problemen zu, die er 1930 als gelöst angesehen hatte: Die von Russell bei Beweis der Peano-Axiome benötigten Annahme eines Unendlichkeitsaxioms hatte ihm 1930 als die einzige Schwierigkeit gegolten, die sich im Zusammenhang mit der Arithmetik noch stellt.[115] Im Zentrum seiner Aufmerksamkeit hatte daher zu dieser Zeit auch nicht die Arithmetik gestanden, sondern das Problem einer logischen Konstruktion der reellen Zahlen. So hatte er noch im September 1930 in Königsberg ausgeführt:

> Hier soll nur von der Definition der *reellen Zahlen* gesprochen werden; die Ableitung der anderen Zahlarten enthält keine prinzipiellen Schwierigkeiten. Das Problem der reellen Zahlen ist dagegen, das muß deutlich zugestanden werden, bis jetzt noch in keiner der drei Richtungen [Logizismus, Intuitionismus, Formalismus] restlos gelöst. (Carnap, 1931a, S. 93)

In der ersten Hälfte von 1931 unternahm Carnap jedoch keinen ernsthaften Versuch mehr, die reellen Zahlen zu konstruieren. Stattdessen rückte nun die Peano-Arithmetik in das

[115] Vergleiche hierzu die Diskussion in Kapitel 2.5.

Zentrum seiner Aufmerksamkeit. Insbesondere versuchte er die folgenden beiden Probleme zu lösen: das Problem der Existenzannahmen, die scheinbar in den Peano-Axiomen enthalten sind, und das Problem der im Induktionsprinzip scheinbar vorausgesetzten Annahme einer Gesamtheit aller natürlichen Zahlen. Meines Erachtens zeigt dieser Umstand deutlich, dass Carnap Anfang 1931 zu der Überzeugung gelangt war, dass die scheinbaren ontologischen Voraussetzungen der Peano-Arithmetik das primäre Problem sind und also dasjenige Problem, das gelöst werden muss, bevor überhaupt versucht werden kann, eine Theorie der reellen Zahlen zu konstruieren.

Im folgenden Kapitel 4.6 werde ich diskutieren, wie Carnap in der ersten Hälfte von 1931 versuchte, die beiden eben angeführten Probleme zu lösen. Ich zeige auf, wie er ausgehend von der im *Versuch* skizzierten Theorie zu der Position gelangte, die er im Sommer 1931 in seinen Referaten über Metalogik verteidigte und mit der er glaubte, das Ziel einer metaphysikfreien Konstruktion der Arithmetik erreicht zu haben.

4.6 Das Projekt einer metaphysikfreien Konstruktion der Arithmetik

Obwohl Carnap im *Versuch* die Idee aufgegeben hatte, dass die Arithmetik in einer typentheoretischen Sprache aufzubauen ist, verfolgte er noch immer ein reduktionistisches Programm in der Philosophie der Mathematik: Im *Versuch* wollte er die arithmetischen Gesetze noch immer auf elementarere Prinzipien zurückführen. Allerdings war es nicht länger die Logik, die diese elementareren Prinzipien liefern sollte, vielmehr war an die Stelle der Logik eine Theorie der Verkettung von Punktreihen getreten.

Es ist offensichtlich, dass Carnap mit seiner metalogischen Reinterpretation nachweisen wollte, dass die Arithmetik als eine harmlose kombinatorische Theorie angesehen werden kann, die nur minimale Voraussetzungen macht und die keine ontologisch voraussetzungsreiche typentheoretische Struktur zu ihrer Grundlage hat. Zwar ist auch Carnaps metalogische Reinterpretation nicht voraussetzungsfrei, auch sie macht Existenzvoraussetzungen und setzt die Geltung bestimmter Prinzipien voraus. Doch die Existenzvoraussetzungen sind bereits auf Grund der in der Konstruktion der eigentlichen Sprache gemachten notationellen Voraussetzungen erfüllt. Zudem sind die im Beweis der arithmetischen Sätze benötigten Prinzipien keineswegs problematische Existenzaxiome wie das Russellsche Unendlichkeitsaxiom. Die vorausgesetzten Prinzipien sind lediglich elementare Prinzipien der Gleichheit und der Verschiedenheit der Resultate der Aneinanderreihung oder der Neuanordnung von Punktreihen.

Carnap glaubte, auch die Methode der Induktion ausgehend von minimalen Voraussetzungen begründen zu können. Frege und Russell bewiesen das Induktionsprinzip mittels ihrer Definition der natürlichen Zahlen als Durchschnitt aller induktiven Mengen und daher ist ihr Beweis dieses Prinzips voraussetzungsreich. Dieser Beweis setzt ja die Existenz unendlicher Mengen voraus (Quine, 1969, S. 75–76).[116] Im *Versuch* hingegen glaubte Carnap, die Methode der Induktion begründen zu können, ohne eine Gesamtheit aller natürlichen Zahlen voraussetzen zu müssen. Um dieses Ziel zu erreichen, verwarf er in einem ersten Schritt die Idee, dass das Induktionsprinzip eine Schlussregel ist, die es erlaubt, Sätze über alle Zahlen zu beweisen:

> Angenommen, wir können die Eigenschaft F(x) für 1 beweisen: F(1), ferner können wir beweisen: Aus F(n) folgt F(n+1). Dann pflegt man zu sagen: Also gilt die Eigenschaft nach dem Prinzip der vollständigen Induktion für alle Zahlen. Aber diesen Allsatz lehnen wir (mit Wittgenstein) ab. (Carnap, 1931b, S. 18).

In einem zweiten Schritt verwies Carnap darauf, dass der im Rahmen eines induktiven Beweises gegebene Beweis der beiden Sätze ‚F(1)' und ‚F(n) ⊃ F(n+1)' eine allgemeine Methode liefert, die es uns erlaubt, für jede vorgegebene Zahl einen Beweis dafür zu konstruieren, dass sie die Eigenschaft F besitzt: Der Beweis von ‚F(n) ⊃ F(n+1)' liefert ein allgemeines Muster, gemäss dem die einzelnen Elemente der Reihe ‚F(1) ⊃ F(2)', ‚F(2) ⊃ F(3)', ... bewiesen werden können. Zudem kann für jede vorgegebene Zahl n aus den ersten n-1 Elementen dieser Reihe zusammen mit dem Satz ‚F(1)' der Satz ‚F(n)' abgeleitet werden (ibid.). Damit ist gezeigt, dass die Methode der Induktion keine Gesamtheit aller natürlichen Zahlen voraussetzt: Gemäss dieser Analyse zeigen wir mit einem Induktionsbeweis ja lediglich auf, wie für jede vorgegebene natürliche Zahl in endlichen vielen Schritten eine Reihe von Sätzen generiert werden kann, aus denen sich dann mit Hilfe von tautologischen Transformationen ableiten lässt, dass die Zahl die fragliche Eigenschaft besitzt.[117]

Allerdings gab Carnap schon in der ersten Hälfte von 1931 das Projekt wieder auf, die Arithmetik als Teil seiner metalogischen Theorie zu konstruieren. Zwar war das Projekt, arithmetische Gleichungen als metalogische Sätze zu interpretieren, in Übereinstimmung mit der zentralen Idee des *Versuchs*, dass die sogenannten internen Eigenschaften metalogische Eigenschaften sind. Denn wie die logischen Eigenschaften galten Carnap auch die

[116] Es ist allerdings möglich, das Induktionsprinzip im Rahmen einer Mengentheorie zu beweisen, die auf die Annahme unendlicher Mengen verzichtet (Quine, 1969, S. 76–77).
[117] Die von Carnap im *Versuch* vorgenommene Analyse induktiver Beweise stimmt in ihren Grundzügen mit derjenigen überein, die Wittgenstein um 1930 entwickelte. Zu Wittgensteins Auseinandersetzung mit dem Induktionsprinzip vergleiche (Marion, 1998, S. 98–107). Da Carnap im *Versuch* im Rahmen seiner Diskussion des Induktionsprinzips explizit auf Wittgenstein verwies, ist anzunehmen, dass er diese Analyse sogar von Wittgenstein übernommen hatte.

arithmetischen Eigenschaften als interne Eigenschaften und also als Eigenschaften, die in metalogischen Sätzen zu beschreiben sind (Carnap, 1931b, S. 44).[118] Vor allem im April und im Mai 1931 unternahm er denn auch verschiedene Anläufe, die im *Versuch* entwickelte metalogische Konzeption der Arithmetik auszuarbeiten. Doch diese Anläufe blieben erfolglos und dies brachte ihn schliesslich dazu, im Juni 1931 die Idee zu verwerfen, dass die arithmetischen Sätze metalogisch zu reformulieren sind (Carus, 2007, S. 236–237).[119]

Damit machte Carnap einen Schritt hin zur Konzeption der *Logischen Syntax*. Denn er gab nun auch die Idee auf, die sowohl sein logizistisches Programm von 1930 als auch noch seine ersten metalogischen Versuche geprägt hatte: die reduktionistische Idee, dass die Rolle der Arithmetik in den Wissenschaften dadurch zu klären ist, dass die Arithmetik auf eine elementarere Theorie zurückgeführt wird. Im Rahmen der Position, die er im Juni 1931 in seinen Referaten über Metalogik präsentierte, versuchte er nicht länger, das arithmetische Vokabular in irgendeiner grundlegenderen Begrifflichkeit zu definieren, und er versuchte auch nicht länger, die arithmetischen Prinzipien aus elementareren Prinzipien abzuleiten. Stattdessen konstruierte er die Arithmetik axiomatisch in seiner Modellsprache: Er setzte die grundlegenden arithmetischen Zeichen (insbesondere ‚0' und ein Zeichen für die Nachfolgerrelation) beim Aufbau seiner Sprache als primitive Zeichen voraus (Stadler, 1997, S. 314–315) und er bediente sich in seiner Definition der Beziehung der Ableitbarkeit für die Modellsprache arithmetischer Grundsätze und Schlussregeln (ibid., 322–323).

Wie aber soll mit einem solchen axiomatischen Aufbau die Rolle der Arithmetik in den Wissenschaften erklärt werden? Einen Teil der Antwort auf diese Frage habe ich bereits in Kapitel 3.3 gegeben: Im Sommer 1931 versuchte Carnap, die arithmetischen Sätze als Quasiformeln zu erweisen, die nur vermittelnde Elemente von Derivationen sind. Allerdings habe ich ein entscheidendes Element seines Lösungsvorschlags bisher noch unerwähnt gelassen: Carnap verfolge immer das Ziel einer metaphysikfreien Konstruktion der

---

[118] Im *Tractatus* machte Wittgenstein geltend, dass die Zahlenreihe nach einer internen Relation geordnet ist (4.1252). Er führte ja die Zahlen als Exponenten einer Operation ein (6.02) und er machte geltend, dass eine Reihe, die durch sukzessive Anwendung einer Operation entsteht, durch eine interne Relation geordnet ist (5.232). Daher ist es plausibel zu behaupten, dass im *Tractatus* die sogenannten Eigenschaften von Zahlen als interne Eigenschaften gelten und dass Carnap also auch mit seiner metalogischen Theorie der Arithmetik versuchte, Wittgensteinsche Ideen in metalogische Bestimmungen zu transformieren.

[119] Dass Carnap dieses Projekt, die Arithmetik als eine metalogische Theorie zu konstruieren, bald wieder verwarf, erstaunt nicht: Ich habe in Kapitel 4.4 betont, dass Carnap das Problem der Anwendbarkeit der Mathematik in das Zentrum seiner Philosophie der Mathematik stellte. Gemäss einer metalogischen Konstruktion der Arithmetik sind jedoch die arithmetischen Eigenschaften Eigenschaften von Formeln und dies verkompliziert eine jede Erklärung der Anwendbarkeit erheblich. So sollte es ja zum Beispiel eine solche Erklärung erlauben, den Schluss von „Es hat sieben Teller auf dem Tisch" zu „Die Anzahl der Teller auf dem Tisch ist eine Primzahl" als zulässig zu erweisen. Doch während die erste Aussage vermutlich mittels Quantoren im Rahmen der eigentlichen Sprache zu analysieren ist, ist gemäss einer metalogischen Theorie der Arithmetik die zweite Aussage als eine metalogische Aussage über Formeln zu analysieren. Daher besteht kein offenkundiger Zusammenhang zwischen diesen Sätzen und der Schluss kann nur unter Zuhilfenahme einer erheblichen Menge zusätzlicher Prämissen als gültig erwiesen werden.

Arithmetik und er versuchte noch immer, sein arithmetisches System in einer solchen Weise zu konstruieren, dass keine Existenzaxiome benötigt werden.

In welcher Weise glaubte Carnap also, dieses Ziel mit seiner Modellsprache erreichen zu können? Um diese Frage zu beantworten, bietet es sich an, dass von ihm in den Referaten präsentierte axiomatische System mit einer Formulierung zu vergleichen, in der alle in der Peano-Arithmetik enthaltenen Voraussetzungen explizit in den Axiomen zum Ausdruck gebracht sind. Ein solch vollständig explizite Formulierung lässt sich jedoch nicht in Carnaps Modellsprache geben, vielmehr muss dazu eine Sprache der Quantorenlogik höherer Stufe verwendet werden. Wird eine solche Sprache vorausgesetzt, so lässt sich eine solche Formulierung der Peano-Arithmetik unter Verwendung eines einzigen undefinierten zweistelligen Prädikats ‚Vg' geben, das die Relation des unmittelbaren Vorangehens in der Zahlenreihe bezeichnet. Wird noch die folgende Abkürzung benützt:

Def.: $N(x) \equiv (\exists y)(Vg(x, y)) \vee (\exists y)(Vg(y, x))$

so nimmt das Axiomensystem dann die folgende Gestalt an:

A1: $(x)(y)(z)[(Vg(x, z) \,.\, Vg(y, z) \supset x = y) \,.\, (Vg(x, y) \,.\, Vg(x, z) \supset y = z)]$

A2: $(\exists x)(y)[N(y) \,.\, {\sim} (\exists z)(Vg(z, y)) \equiv y = x)]$

A3: $(x)(N(x) \supset (\exists y)(Vg(x, y)))$

A4: $(x)(y)(F)[N(x) \,.\, {\sim} (\exists z)(Vg(z, x)) \,.\, F(x) \,.\, (u)(v)(F(u) \,.\, Vg(u, v) \supset F(v)) \,.\, N(y) \supset F(y)]$.[120]

Das System der Peano-Arithmetik, das Carnap in seinen Referaten präsentierte (Stadler, 1997, S. 322–323), unterscheidet sich in verschiedenen Hinsichten von diesem Axiomensystem A1–A4. Die Modellsprache, die Carnap in den Referate präsentierte, war eine Koordinatensprache, die eine eindimensionale Reihe mit einem Anfangsglied und einer ausgezeichneten Richtung zu ihrem Gegenstandsbereich hat. Diese Sprache beschreibt also eine Reihe von der Art, wie sie durch die Peano-Axiome charakterisiert wird. Da Carnap seine Modellsprache in den Referaten streng syntaktisch aufbauen wollte, stützte er sich bei seiner Konstruktion jedoch nicht auf eine solch inhaltliche Beschreibung des Gegenstandsbereiches. Vielmehr transformierte er diese Beschreibung in die syntaktische Bestimmung, dass die Individuenkonstanten der Modellsprache genau die Zeichenreihen sein sollen, die aus einer ausgezeichneten Konstante – dem Nullzeichen – bestehen, gefolgt von einer endlichen Anzahl von Strichen ‚′' (Carnap, 1934a, S. 24; Stadler, 1997, S. 314).[121, 122]

---

120 Ich habe dieses System der Peano-Arithmetik übernommen aus (Carnap, 1960, S. 184–185).

121 Ich verwende in der folgenden Darstellung die einfachere Notation, der sich Carnap in der *Logischen Syntax* bediente. Abgesehen von der unterschiedlichen Notation besteht lediglich eine, wenn auch entscheidende Differenz zwischen dem arithmetischen System, das Carnap im Rahmen seiner Sprache I konstruierte, und

Diese Bestimmung über die Syntax der Modellsprache erlaubte es Carnap, das Axiom A1 des oben formulierten Axiomensystems durch das folgende Axiom zu ersetzen: [123]

A1': $m' = n' \supset m = n$

Auf die Annahme der zweiten in A1 enthaltenen Behauptungen ‚$m = n \supset m' = n'$' konnte er nämlich verzichten, da sich diese aus den für die Modellsprache aufgestellten Grundsätze der Identität beweisen lässt.[124] Das Axiom A2 konnte er durch das folgende Axiom ersetzen:

A2': $\sim (0 = n')$

Denn auch die in A2 zusätzlich enthaltene Behauptung, dass es genau eine Zahl gibt, die kein Nachfolger ist, lässt sich in der Modellsprache aus A2' beweisen. Zudem konnte Carnap auf die Aufstellung von A3 vollständig verzichten, da sich die durch dieses Axiom gemachte Behauptung bereits daraus ergibt, dass sich in der Modellsprache aus jeder Individuenkonstante durch Anhängung eines zusätzlichen Striches eine weitere Individuenkonstante bilden lässt. Schliesslich ersetzte er das Induktionsprinzip A4 durch die folgende metalogisch formulierte Schlussregel:

A4': Ist S eine Formel, in der die Individuenvariable x frei vorkommt, S_1 der Satz, der dadurch aus S entsteht, dass x überall durch das Nullzeichen ersetzt wird, und S_2 der Satz, der dadurch aus S entsteht, dass x überall durch x′ ersetzt wird, so ist S aus S_1 und $S \supset S_2$ ableitbar.

Dieser Vergleich des Axiomensystem A1–A4 mit dem von Carnap in den Referaten entwickelten System zeigt also, dass Carnaps System im Unterschied zu A1–A4 ohne höherstufige Quantoren und ohne explizite Existenzannahmen auskommt.[125] In der Modellsprache werden diese Existenzannahmen in Bestimmungen über die Syntax der Individuenkonstanten transformiert und dadurch als überflüssig erwiesen. Meines Erachtens ist es klar, dass die Möglichkeit einer solchen Reformulierung der Axiome der Peano-

---

demjenigen, das er in den Referaten präsentierte: Zu dem Umformungsbestimmungen der Sprache I gehört auch noch die ω-Regel (Carnap, 1934a, S. 28 –29).

[122] Der Grundgedanke, der hinter dieser Einführung der Zahlzeichen steht, ist also immer noch derjenige, den Carnap schon im *Versuch* entwickelt hatte.

[123] Wie in Kapitel 3.3 erwähnt, bediente sich Carnap in seiner Modellsprache freier Variablen, um unbeschränkte Allgemeinheit auszudrücken. Das folgende Axiom A1' besagt daher, dass für beliebige Zahlen m und n gilt, dass sie identisch sind, wenn ihre Nachfolger identisch sind.

[124] Die Formel ‚$m = n \supset m' = n'$' lässt sich in der Modellsprache aus dem Grundsatz der Identität ‚$n = n$' und aus einem beweisbaren Grundsatz der Ersetzung ableiten (Carnap, 1934a, S. 33).

[125] Allerdings ist das Axiomensystem A1–A4 nicht äquivalent zum System A1', A2', A4'. Während das erste System kategorisch ist und also nur ein bis auf Isomorphie eindeutig bestimmtes Modell besitzt, ist das zweite System nicht kategorisch. Es lässt sich ja kein kategorisches Axiomensystem der Peano-Arithmetik in einer Sprache der Quantorenlogik erster Stufe formulieren. Obwohl dieses Resultat eine Konsequenz des Gödelschen Vollständigkeitssatzes und des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes ist (Read, 1997, S. 85), gibt es Gründe dafür anzunehmen, dass Carnap sich dieser Konsequenz im Sommer 1931 noch nicht bewusst war. So behauptete er am 2. Juli im Wiener Kreis noch, dass sich alles, was sich mittels höherstufiger Quantifikationen ausdrücken lässt, auch mittels metalogischer Aussagen über Formeln ausdrücken lässt (Stadler, 1997, S. 334).

Arithmetik einen wichtigen Grund dafür bildete, weshalb Carnap in seinen Referaten glaubte behaupten zu können, dass die Arithmetik ein blosser Kalkül von Quasiformeln ist, der keine metaphysischen Implikationen besitzt: Die einzigen Axiome, die er noch brauchte, sind ja Verallgemeinerungen von aussagenlogischen Verbindungen von Gleichungen. Das Induktionsprinzip ist in Carnaps System zudem lediglich noch eine Schlussregel zur Transformation von Gleichungen, in der offensichtlich nicht von einer Gesamtheit aller Zahlen die Rede ist (Stadler, 1997, S. 323).

4.7 Analytizität und Toleranz

Wie ich in Kapitel 3.4 gezeigt habe, machte Carnap im Herbst 1931 einen Schritt über die Konzeption hinaus, die er in seinen Referaten über Metalogik präsentiert hatte. Unter dem Einfluss von Hahn und Gödel gelangte er ja zu der Einsicht, dass eine Konstruktion der reellen Zahlen in der Modellsprache nicht zu einer Theorie führen kann, die den Gesetzen der klassischen Mathematik genügt. Diese Einsicht zwang ihn dazu, seine erweiterte Sprache einzuführen, um so eine zufriedenstellende Theorie der reellen Zahlen formulieren zu können. In der Folge gab er sein Projekt wieder auf, die Arithmetik von vornherein als ein System von Quasiformeln zu konstruieren: Im *Metalogik* Manuskript, an dem er nun zu arbeiten begann, nahm er Elemente seines Programms von 1930 wieder auf und versuchte erneut, mittels eines vollständigen Kriteriums für mathematische Wahrheit die Mathematik als ein gehaltleeres Hilfsmittel der Transformation zu erweisen. Aber obwohl er wieder versuchte, ein solches Kriterium zu formulieren, kehrte er dennoch nicht zu der Idee zurück, dass ein logizistischer Aufbau notwendig ist, um den Begriff der mathematischen Wahrheit zu definieren. Stattdessen behielt er die in den Referaten entwickelte Idee bei, dass die Mathematik im Rahmen eines logisch-mathematischen Axiomensystems zu konstruieren ist.[126]

Da das *Metalogik* Manuskript nicht erhalten ist, wissen wir nicht, wie Carnap genau versuchte, die Arithmetik im Rahmen seiner Modellsprache und die gesamte klassische Mathematik im Rahmen seiner erweiterten Sprache zu konstruieren. Allerdings zeigt der Briefwechsel mit Gödel vom September 1932, dass er in seiner erweiterten Sprache wieder höherstufige Quantifikationen zuliess (Gödel, 2003, S. 346–348) und dass er diese Sprache also wieder ausgehend von einem System der einfachen Typentheorie errichtete. Die

---

[126] Da bereits die in den Referaten über Metalogik entwickelte Modellsprache deutliche Ähnlichkeiten mit der Sprache I der *Logischen Syntax* aufwies, gibt es keinen Grund dafür anzunehmen, dass Carnap in seinem *Metalogik* Manuskript die Modellsprache in einer grundsätzlich anderen Weise konstruierte als in den Referaten. Zudem legt das Inhaltverzeichnis nahe, dass der erste Teil dieses Manuskripts, der der Konstruktion der Modellsprache gewidmet war, im Grossen und Ganzen identisch war mit dem ersten Teil der *Logischen Syntax*, in dem die Sprache I aufgebaut wird (Carnap, 1932b; 1934a, S. 10–45).

erweitere Sprache war somit wieder eine Sprache von der Art wie diejenige, die er gegen Ende des Jahres 1930 angesichts des Gödelschen Unvollständigkeitssatzes verworfen hatte.

Ich habe bereits in Kapitel 3.4 eine mögliche Erklärung dafür gegeben, weshalb Carnap sich im Herbst 1931 erneut dem Projekt zuwandte, den Begriff der mathematischen Wahrheit zu definieren. Doch da er mit der erweiterten Sprache wieder eine typentheoretische Sprache aufbaute, legen die Ausführungen der letzten Kapitel noch eine andere Erklärung nahe: Er wandte sich diesem Projekt wieder zu, weil ihn die Einführung der erweiterten Sprache mit der ihr zugrundeliegenden Typenhierarchie und der in ihr gegebenen Möglichkeit höherstufiger Quantifikationen dazu zwang, sein Projekt einer metaphysikfreien Konstruktion der Mathematik durch Elimination von Existenzannahmen als gescheitert einzustufen. Um die ontologischen Voraussetzungen der erweiterten Sprache als scheinbare erklären zu können, brauchte er wieder eine Definition der mathematischen Wahrheit, die es ihm erlaubte, die mathematischen Sätze als gehaltleer zu erweisen.[127]

Obwohl Carnap 1932 eine Definition von ‚analytisch' für die erweiterten Sprache als absolut zentral für sein gesamtes Projekt einstufte (ibid., S. 350), findet sich in der *Logischen Syntax* keine solche Definition. Diese Definition wird zwar in der englischen Übersetzung von 1937 gegeben (Carnap, 1937, § 34), doch im deutschen Original wurde sie „wegen Platzmangel" weggelassen (Carnap, 1934a, S. VII).[128] Dieser Umstand deutet bereits darauf hin, dass Carnap zwischen 1932 und 1934 seine Position in der Philosophie der Mathematik noch einmal radikal modifiziert hatte. Und der Grund dafür liegt auf der Hand: der im Herbst 1932 gemachte Schritt zum Toleranzprinzip (Awodey & Carus, 2007, S. 36–38).

Wie Ricketts betont hat, gab Carnap mit dem Schritt zum Toleranzprinzip in einem gewissen Sinn die Philosophie der Mathematik auf: „In a sense, he [Carnap] gives up philosophy of mathematics. He proposes the transformation of debates in the foundations of mathematics into the elaboration and investigation of various calculi" (Ricketts, 2007, S. 211–212). Ich werde in Kapitel 5 im Detail darauf eingehen, wie die zentralen Thesen der *Logischen Syntax* die Diskussion über die Grundlagen der Mathematik in eine Untersuchung der Vorzüge und Nachteile verschiedener syntaktisch spezifizierter Sprachformen transformieren. Hier werde ich lediglich noch aufzeigen, weshalb Carnap in der *Logischen Syntax* mit seiner syntaktischen Definition von ‚analytisch' nicht mehr länger ein traditionelles philosophisches Rechtfertigungs- oder Explikationsprojekt verfolgte.

---

[127] Auch das Inhaltsverzeichnis des *Metalogik* Manuskripts stützt diese These. Der dritte Teil des Manuskripts, der dem Aufbau der erweiterten Sprache gewidmet war, enthielt ein Kapitel mit dem Titel ‚Ueber Existenzvoraussetzungen in der Logik' (Carnap, 1932b).

[128] Carnap publizierte seine Definition allerdings bereits 1935 in seinem Aufsatz *Ein Gültigkeitskriterium für die Sätze der klassischen Mathematik* (Carnap, 1935b).

In Carnaps *Metalogik* Manuskript war die Definition von ‚analytisch‘ für seine beiden Sprachen zweifelsohne ein Kernelement eines substantiellen philosophischen Legitimationsprojekts: Die sich aus der Definition ergebende gehaltleere Natur der mathematischen Wahrheiten sollte die mathematischen Ressourcen der Modellsprache und der erweiterten Sprache rechtfertigen und insbesondere die These stützen, dass die Mathematik kein Reich abstrakter Entitäten beschreibt. Doch gemäss dem Toleranzprinzip kann jeder „seine Logik, d.h. seine Sprachform, aufbauen wie er will“ (Carnap, 1934a, S. 45), und damit ist jedem solchen Legitimationsprojekt die Grundlage entzogen.

In der *Logischen Syntax* ist auch die Behauptung, dass die logisch-mathematischen Sätze eines Kalküls analytisch oder kontradiktorisch sind, nicht mehr länger Bestandteil eines Legitimationsprojektes, sondern lediglich noch ein Versuch, die spezifische Funktion dieser Sätze in einem inferentiellen System syntaktisch zu fassen (Carnap, 1963b, S. 921). Daher kann diese Behauptung auch nicht mehr als eine umfassende Bestimmung der Natur der mathematischen Wahrheit gelten: In der *Logischen Syntax* wollte Carnap zeigen, dass für eine gegebene Sprache im Rahmen einer vorausgesetzten Metasprache eine syntaktische Unterscheidung gezogen werden kann zwischen den Sätzen, die Konsequenzen artikulieren, die in den inferentiellen Bestimmungen der Sprache enthalten sind, und den Sätzen, für die dies nicht gilt und die also innerhalb dieser Sprache als diejenigen Sätze gelten können, die Tatsachen beschreiben (Carnap, 1934a, §§ 51–52). Diese syntaktische Unterscheidung zwischen den analytischen und den synthetischen Sätzen einer Sprache ist jedoch nicht verallgemeinerbar zu einer sprachtranszendenten Bestimmung des spezifischen Charakters der mathematischen Wahrheit. Carnap definierte also in der *Logischen Syntax* kein relationales Prädikat ‚S ist analytisch in K‘ mit variablem ‚S‘ und variablem ‚K‘, er definierte lediglich Prädikate der Form ‚analytisch-in-K_0‘ (Quine, 1951, S. 32). Wenn von einer Klärung des Begriffs der mathematischen Wahrheit gefordert wird, dass sie allgemeine Charakteristika dieses Begriffs auflistet und also zu einer Definition von ‚S ist analytisch in K‘ führt, so lieferte er daher keine Klärung dieses Begriffes.

Allerdings versuchte Carnap mit seiner sprachrelativen Charakterisierung der Funktion mathematischer Sätze durchaus eine Klärung des Begriffs der mathematischen Wahrheit zu leisten: Die Definition von ‚analytisch-in-K_0‘ sollte für den vagen und ungenauen Begriff der mathematischen Wahrheit einen lokalen Ersatz liefern, der für ein vorgängig spezifiziertes Regelsystem in gewissen Hinsichten eine analoge Rolle spielt wie der informale Begriff für die alltägliche Sprache (Awodey & Carus, 2004, S. 210). Mit dem Toleranzprinzip verwarf Carnap die Idee, dass ein präzise definierter Begriff einen globalen Ersatz liefern kann für einen informalen Begriff, und er entwickelte eine Konzeption von Explikation, gemäss der

der Begriff der mathematischen Wahrheit dadurch zu explizieren ist, dass zunächst ein inferentielles System syntaktisch spezifiziert wird und dann diejenigen Sätze syntaktisch charakterisiert werden, die in diesem System eine Rolle spielen, die in gewissen Hinsichten derjenigen vergleichbar ist, die die mathematischen Theoreme in der wissenschaftlichen Praxis spielen. Genauer charakterisierte Carnap mit seiner Definition von ‚analytisch-in-K_0' diejenigen Sätze des inferentiellen Systems K_0, die in diesem System lediglich Hilfsmittel der Deduktion sind und deren Funktion in diesem System also in dieser Hinsicht derjenigen entspricht, die die mathematischen Wahrheiten in der wissenschaftlichen Praxis spielen.

Diese lokale Konzeption der Explikation ist für die Position der *Logischen Syntax* entscheidend. Wie bereits mehrfach betont, benötigte Carnap, um ein bivalentes Wahrheitsprädikat für die logisch-mathematischen Sätze einer Sprache K_0 definieren zu können, eine Metasprache, deren logisch-mathematischen Ressourcen umfassender sind als diejenigen von K_0. In seiner Definition von ‚analytisch-in-K_0' setzte er also in der verwendeten Metasprache K_1 die gesamten logisch-mathematischen Ressourcen von K_0 voruas, die mittels dieser Definition als analytisch erwiesen werden sollten. Wird eine umfassende Klärung der Natur der mathematischen Wahrheit gefordert, so wäre daher in einem nächsten Schritt ein Prädikat ‚analytisch-in-K_1' zu definieren. Doch da diese Definition wiederum die logisch-mathematischen Ressourcen einer stärkeren Meta-Metasprache K_2 voraussetzt, kann es in dieser Weise nicht gelingen, eine umfassende Klärung der Natur der mathematischen Wahrheit zu liefern.

Carnaps lokale Konzeption von Begriffsexplikation erlaubte es ihm, diesen infiniten Regress als harmlos einzustufen: Mit einer Definition von ‚analytisch-in-K_0' liefern wir einen lokalen Ersatz für den Begriff der mathematischen Wahrheit, und zwar dadurch, dass wir eine gewisse Klasse von Sätzen eines syntaktischen Kalküls K_0 charakterisieren. Wir verwenden in unserer Charakterisierung zwar logisch-mathematische Ressourcen, doch dies untergräbt das Explikationsprojekt nicht. Denn mit dieser Charakterisierung einer Satzklasse von K_0 ist bereits ein lokaler Ersatz für den Begriff der mathematischen Wahrheit geliefert und also eine Explikation erreicht. Wir können dann zwar durchaus auch noch versuchen, den Status der logisch-mathematischen Ressourcen zu klären, die in der Definition von ‚analytisch-in-K_0' verwendet wurden, doch das ursprüngliche Ziel einer lokalen Explikation des Begriffs der mathematischen Wahrheit zwingt uns in keiner Weise dazu.

5 Logizismus in Carnaps *Logischer Syntax*

Ich habe in Kapitel 4.7 aufgezeigt, wie Carnap 1934 versuchte, eine Auffassung von Begriffsklärung zu entwickeln, der gemäss eine solche Klärung darin besteht, dass im Rahmen eines präzise spezifizierten Systems ein lokaler Ersatz für den zu klärenden Begriff definiert wird. Die Konzeption der *Logischen Syntax*, die geprägt ist von einer syntaktischen Sprachauffassung und einer toleranten Einstellung gegenüber der Wahl von Sprachformen, erlaubte es Carnap jedoch nicht nur, ein Verständnis von Begriffsklärung zu entwickeln, für das die Notwendigkeit einer Hierarchie von immer stärkeren syntaktischen Sprachen keine grundsätzliche Schwierigkeit darstellt. Diese Konzeption erlaubte es ihm auch geltend zu machen, dass die logisch-philosophischen Diskussionen über die Grundlagen der Logik und der Mathematik sich vollständig in eine Untersuchung der Vorzüge und Nachteile von präzise konstruierten Sprachformen transformieren lassen.

Genauer machte Carnap in der *Logischen Syntax* geltend, dass der Schritt zu einer syntaktischen Konzeption von Logik diese Grundlagendebatten von allen Scheinfragen und Pseudo-Problemen reinigt. Dieser Schritt befreit diese Debatten von Unklarheiten und transformiert die scheinbaren philosophischen Thesen, die im Zentrum dieser Debatten stehen, in syntaktische Sätze, die vollständig präzise formuliert werden können (Carnap, 1934a, S. 225–228). Wird zusätzlich die im Toleranzprinzip empfohlene Einstellung akzeptiert, so wird auch noch die Idee aufgegeben, dass der Aufbau einer Sprachform zu der einen korrekten Logik führen muss. Damit sind diese logisch-philosophischen Grundlagendebatten umfassend von allen unfruchtbaren Diskussionen befreit. Es bleiben einzig noch Thesen, die präzise formuliert werden können, und Fragen, die mit Argumenten entschieden werden können:

> Bei dieser Einstellung verschwindet auch der Streit zwischen den verschiedenen Richtungen im Grundlagenproblem der Mathematik. Man kann die Sprache in ihrem mathematischen Teil so einrichten, wie die eine, oder so, wie die andere Richtung es vorzieht. Eine Frage der „Berechtigung“ gibt es da nicht; sondern nur die Frage der syntaktischen Konsequenzen, zu denen die eine oder andere Wahl führt ... . Jene ersten Versuche, das Schiff der Logik vom festen Ufer der klassischen Form zu lösen, waren, historisch betrachtet, gewiß kühn. Aber sie waren gehemmt durch das Streben nach „Richtigkeit“. Nun aber ist die Hemmung überwunden; vor uns liegt der offene Ozean der freien Möglichkeiten. (ibid., S. V–VI)

In diesem Kapitel 5 werde ich im Detail diskutieren, wie die zentralen Elemente der Konzeption der *Logischen Syntax* die Diskussion über die Grundlagen der Logik und der Mathematik in eine syntaktische Untersuchung verschiedenster Sprachformen transformieren. Im Zentrum steht die Frage, ob und in welchem Umfang es gelingen kann, Thesen, die in der logizistischen Tradition vertreten wurden, als syntaktische Thesen zu reformulieren, denen noch so etwas wie philosophische Signifikanz zugesprochen werden kann. Tatsächlich versuchte auch Carnap selbst in der *Logischen Syntax* eine Forderung zu formulieren, die er für eine genuin logizistische hielt und die ihm als eine präzise Formulierung des hauptsächlichen Gehaltes der traditionellen logizistischen Positionen galt (ibid., S. 253–255). Daher ist selbstverständlich auch zu überprüfen, ob Carnaps eigener Versuch, den Logizismus in eine syntaktische Forderung zu transformieren, als gelungen bezeichnet werden kann.

Die These, die in diesem Kapitel 5 begründet werden soll, ist die folgende: Einerseits sind Elemente der von Carnap im Jahre 1930 vertretenen Version einer logizistischen Position in die Konzeption integriert, die in der *Logischen Syntax* den allgemeinen Rahmen für die Untersuchung syntaktisch spezifizierter Sprachformen liefert. Andererseits ist es aber dennoch nicht möglich, in diesem allgemeinen Rahmen eine Position zu definieren, die es verdienen würde, als eine genuin logizistische bezeichnet zu werden. Insbesondere kann auch Carnaps eigener Versuch, den Logizismus syntaktisch zu charakterisieren, nicht als gelungen gelten. Ausgehend von dieser These werde ich dann zum Schluss dieses Kapitels 5 versuchen, die Frage zu beantworten, ob und in welchem Umfang sich die *Logische Syntax* noch als ein Werk verstehen lässt, das in der von Frege und Russell begründeten logizistischen Tradition steht.

5.1 Ein Platz für den Logizismus?

Wie bereits in Kapitel 4 erwähnt, mass Carnap in der *Logischen Syntax* der logizistischen Kernthese, dass sich die Mathematik auf einer rein logischen Basis aufbauen lässt, keine philosophische Signifikanz mehr bei. Vielmehr erachtete er die Frage, ob ein Kalkül, der die klassische Mathematik umfasst, auf einer rein logischen Basis aufgebaut werden soll oder nicht, nur mehr noch als eine „Frage der technischen Zweckmäßigkeit“ (Carnap, 1934a, S. 255). Zusätzlich war er davon überzeugt, dass diese Frage zugunsten eines Aufbaus zu entscheiden ist, der sich nicht einer rein logischen, sondern einer logisch-mathematischen Basis bedient.

Zudem schliesst das Toleranzprinzip nicht nur jeden Versuch aus, das System der klassischen Mathematik durch einen geeigneten Aufbau zu legitimieren. Das Prinzip schliesst auch jeden Versuch aus zu bestimmen, was mathematische Wahrheit tatsächlich und eigentlich ist. Ein toleranter Philosoph konstruiert lediglich syntaktisch spezifizierte Sprachformen, die zu einem gewissen Grad als Realisierungen der Ideen gelten können, die durch traditionelle philosophische Thesen ausgedrückt werden, und beurteilt dann die Zweckmässigkeit dieser Sprachformen für gewisse Zwecke.[129]

Somit scheint das Toleranzprinzip das logizistische Programm jeder möglichen philosophischen Motivation zu berauben: Wie in Kapitel 2.2 diskutiert, verfolgte ja zum Beispiel Frege mit seinem Logizismus gerade das Ziel, die letzten Geltungsgründe der mathematischen Wahrheiten zu bestimmen, um so die klassische Mathematik endgültig zu rechtfertigen. Wie in Kapitel 2.4 diskutiert, verfolgte Carnap 1930 mit seinem Projekt einer logizistischen Reduktion gerade das Ziel, eine umfassende Bestimmung der eigentlichen Natur der mathematischen Wahrheit zu geben. Überhaupt scheinen das Toleranzprinzip und Carnaps syntaktische Logikkonzeption das logizistische Programm in ein rein technisches Programm zu transformieren, das darauf abzielt, ausgehend von gewissen aufgelisteten Grundzeichen und gewissen aufgelisteten Grundsätzen einen Kalkül zu konstruieren, der die gesamte klassische Mathematik enthält.[130]

Aus diesen Gründen ist es zumindest von vornherein nicht sonderlich plausibel zu behaupten, dass es im Rahmen der Konzeption der *Logischen Syntax* noch gelingen kann, dem Logizismus philosophische Signifikanz zuzuschreiben. Wie bereits erwähnt, versuchte Carnap aber auch in diesem Buch, den Logizismus als eine philosophisch signifikante Position zu charakterisieren. Dazu setzte er ihn mit der Forderung gleich, dass eine Sprachform zu konstruieren ist, die Anwendungsregeln für die Verwendung mathematischer Zeichen in deskriptiven Sätzen enthält (ibid., S. 255). In der *Logischen Syntax* identifizierte er also den Logizismus mit einer Position, die geltend macht, dass ein umfassendes und einheitliches Sprachsystem aufzubauen ist, das es erlaubt, die formalen und die empirischen Wissenschaften zu formulieren, und das insbesondere auch die Anwendung der Mathematik in den empirischen Wissenschaften ermöglicht und regelt. Doch kann diese Forderung tatsächlich als eine genuin logizistische gelten? Und ist sie dasjenige, was bleibt, wenn die logizistische Position unter Voraussetzung einer syntaktischen Sprachauffassung und einer toleranten Einstellung gegenüber der Wahl von Sprachformen reformuliert wird?

Sollen diese Fragen beantworten werden, so darf eine Unterscheidung nicht ignoriert werden. Ich setze in diesem Kapitel 5 voraus, dass die von Carnap in der *Logischen Syntax*

[129] Vergleiche hierzu die Diskussion in 4. 7.

[130] Es erstaunt daher nicht, dass gewisse Exponenten der logizistischen Tradition die Konzeption, die Carnap in der *Logischen Syntax* entwickelte, für völlig verfehlt hielten. Einen schönen Beleg dafür liefern Russells Kommentare zur *Logischen Syntax*, die sich in der Einleitung zu der zweiten Auflage der *Principles of Mathematics* finden (Russell, 1937, S. XII).

entwickelte Konzeption von wissenschaftlicher Philosophie im Wesentlichen korrekt ist. Aus dieser Voraussetzung ergibt sich, dass ein Philosoph sich einzig noch den folgenden beiden Projekten widmen kann: Er kann sich erstens derjenigen Disziplin widmen, die Carnap als allgemeine Syntax bezeichnet. Es ist das Ziel dieser Disziplin, ein System syntaktischer Begriffe zu definieren, „die so weit gefaßt sind, daß sie auf beliebige Sprachen bezogen werden können" (ibid., S. 120). Diese allgemeine Syntax ist somit ein Versuch, ein allgemeines begriffliches Rahmenwerk zu konstruieren, innerhalb dessen die logischen Eigenschaften beliebiger Kalküle diskutiert werden können. Zweitens kann sich ein toleranter Philosoph dem Projekt zuwenden, innerhalb dieses begrifflichen Rahmens der allgemeinen Syntax Sprachen zu konstruieren, die logischen Eigenschaften einer bestimmten Sprache zu untersuchen oder ihre Nützlichkeit für gegebene Zwecke zu diskutieren. Mit seiner Konstruktion einer Sprachform kann er das Ziel verfolgen, eine für eine bestimmte wissenschaftliche Disziplin geeignete Sprache zu entwickeln. Er kann aber auch das Ziel verfolgen, den Gehalt einer philosophischen Position zu klären. So konstruierte zum Beispiel Carnap selbst mit seiner Sprache I eine Sprachform, die bis zu einem gewissen Grad als eine Realisierung von finitistischen oder konstruktivistischen Ideen in der Philosophie der Mathematik gelten kann.[131] Mit seiner Sprache II hingegen versuchte er eine Sprachform zu entwickeln, die die logisch-mathematischen Ressourcen bietet, die in der theoretischen Physik benötigt werden (ibid., S. 74).

Soll untersucht werden, in welcher Beziehung die Konzeption der *Logischen Syntax* zu Thesen steht, die in der logizistischen Tradition vertreten wurden, so sind deshalb die folgenden zwei Fragen zu unterscheiden: Wir können erstens fragen, ob von einem Philosophen, der das erste der beiden eben unterschiedenen Projekte verfolgt, geltend gemacht werden kann, dass er in der logizistischen Tradition steht, oder wir können zweitens fragen, ob dies von einem Philosophen behauptet werden kann, der das zweite Projekt verfolgt. Genauer sind also die folgenden zwei Fragen zu unterscheiden: i) Gibt es Aspekte von Carnaps Ansichten darüber, wie das begriffliche System der allgemeinen Syntax aufzubauen ist, die eine genuine Verpflichtung auf logizistische Gedanken bezeugen? ii) Ist es möglich, im Rahmen dieses begrifflichen Systems nützliche Sprachformen zu konstruieren, die als genuin logizistische Sprachformen gelten können? Um die Frage i) zu beantworten, sind also Fragen der folgenden Art zu untersuchen: Sind Carnaps Ansichten darüber, wie Präzision im Aufbau von Sprachformen zu erzielen ist, von logizistischen Gedanken geprägt?

[131] So bemerkte Carnap in der *Logischen Syntax*: „Einige von den Tendenzen, die man als finitistisch oder konstruktivistisch zu bezeichnen pflegt, finden in der definiten Sprache I in gewissem Sinn ihre Verwirklichung" (Carnap, 1934a, S. 41). Da jedoch diese Tendenzen üblicherweise nur sehr vage formuliert werden, lässt es sich nicht genauer entscheiden, in welchem Umfang diese Tendenzen tatsächlich in der Sprache I ihre Verwirklichung finden (ibid.).

Sind die von ihm in der allgemeinen Syntax gegebenen Definitionen von solchen Gedanken inspiriert? Um die Frage ii) zu beantworten, sind hingegen Fragen der folgenden Art zu stellen: Ist es möglich, im Rahmen des Begriffssystems der allgemeinen Syntax so etwas wie eine logizistische Sprachform zu konstruieren? Und wenn solche Sprachformen konstruiert werden können, gibt es dann Gründe, einer solchen Sprachform unter gewissen Umständen den Vorzug zu geben? In den folgenden Kapiteln werde ich mich in erster Linie auf die Frage ii) konzentrieren, ich werde aber auch versuchen, die Frage i) zu beantworten.

5.2 Wie der Logizismus zu analysieren ist

Um die zweite der eben formulierten Fragen zu beantworten, muss eine These, die von Vertretern einer logizistischen Position verfochten wird, zum Ausgangspunkt gewählt werden. Dann muss versucht werden, die gewählte These in irgendeiner Weise innerhalb des in der *Logischen Syntax* entwickelten Rahmenwerkes unterzubringen. Doch wie ist dabei genau vorzugehen? In diesem Kapitel werde ich im Allgemeinen diskutieren, welche Methode dabei anzuwenden ist. In den Kapiteln 5.3–5.6 werde ich dann diese Methode auf eine Reihe von Behauptungen anwenden, die typischerweise von Logizisten vertreten wurden. Im diesem Kapitel verwende ich die folgende These, die etwa von Russell vertreten wurde, als Beispiel:

1) Die Zahlen sind Klassen von Klassen von Dingen.[132]

Wie es auch für die meisten anderen Sätze gilt, die in philosophischen Diskussionen formuliert werden, kann 1) gemäss den von Carnap 1934 aufgestellten Standards für Präzision nicht als ein präzise formulierter Satz gelten. Daher muss diese These zunächst einmal geklärt werden. Soll eine solche Klärung erzielt werden, so muss in einem ersten Schritt entschieden werden, um was für eine Art von Satz es sich bei 1) handeln soll. 1) ist offensichtlich kein Scheinsatz, also nicht ein Satz, der keinen theoretischen Gehalt besitzt und nur eine Gefühlsäusserung ist, „die beim Hörer wiederum Gefühle und Willenseinstellungen“ anregt (Carnap, 1934a, S. 204). Daher bleiben gemäss der in der *Logischen Syntax* vertretenen Konzeption einzig noch die folgenden drei Möglichkeiten offen: 1) ist entweder ein Objektsatz, ein syntaktischer Satz oder ein Pseudo-Objektsatz. Objektsätze beziehen sich auf die Objekte, die in einem Gebiet der empirischen Wissenschaften behandelt werden. Syntaktische Sätze sind hingegen dadurch ausgezeichnet, dass sie sich einzig auf die Art und die Reihenfolge der Zeichen beziehen, aus denen Ausdrücke aufgebaut sind. Für die Pseudo-Objektsätze ist es schliesslich charakteristisch, dass sie „so formuliert sind, als ob sie sich (auch oder ausschließlich) auf Objekte bezögen, während sie sich in Wirklichkeit auf syntaktische Formen beziehen, und zwar auf die Formen der Bezeichnungen der Objekte, auf

[132] Dieses Beispiel wird auch in der *Logischen Syntax* diskutiert (Carnap, 1934a, S. 227).

die sie sich scheinbar beziehen“ (ibid., S. 211). Ein solcher Pseudo-Objektsatz lässt sich daher immer in einen syntaktischen Satz übersetzen, und zwar in einen syntaktischen Satz, der sich auf die Bezeichnungen derjenigen Objekte bezieht, von denen der Pseudo-Objektsatz scheinbar handelt.[133]

Da 1) gemäss Carnap zu der letzten dieser drei Arten von Sätzen gehört (ibid., S. 227), ist 1) also dadurch zu klären, dass 1) in eine Sprache der Syntax übersetzt wird. Doch wie ist zu entscheiden, welcher syntaktische Satz als Übersetzung eines solchen Pseudo-Objektsatzes zu wählen ist? Wenn jemand in einer Diskussion einen solchen Pseudo-Objektsatz behauptet, so kann von ihm verlangt werden, dass er einen syntaktischen Satz angibt, der seine Behauptung präzisiert (ibid., S. 229). Wenn also zum Beispiel ein Philosoph in einer Diskussion die These 1) vertritt und gleichzeitig bestreitet, dass es einen syntaktischen Satz gibt, der ein adäquater Ausdruck dessen ist, was er behaupten will, so disqualifiziert er sich damit als Gesprächspartner. Wenn hingegen ein Pseudo-Objektsatz untersucht werden soll, der zum Beispiel aus einer Abhandlung über die Grundlagen der Mathematik stammt, so ist zunächst zu prüfen, ob dieser Satz irgendwelche Anhaltspunkte für die Bestimmung einer syntaktischen Übersetzung bieten. Ist dies nicht der Fall, so steht der Satz „außerhalb des Bereiches der wissenschaftlichen Sprache und außerhalb der Diskussion“ (ibid., S. 241). Wenn der Satz hingegen solche Anhaltspunkte bietet, so ist ausgehend von diesen Anhaltspunkten unter Berücksichtigung des „üblichen Sprachgebrauchs“ und der „von dem betreffenden Verfasser etwa aufgestellten Definitionen“ eine solche Übersetzung zu bestimmen (ibid.).

Im Allgemeinen wird es jedoch nicht eine einzige korrekte Übersetzung geben: Ist ein Satz mehrdeutig und unpräzise, so lässt er nicht nur eine Deutung zu. Soll ein solcher Satz in einen syntaktischen Satz übersetzt werden, so ist daher eine Wahl zu treffen zwischen verschiedenen syntaktischen Sätzen, die sich bezüglich ihres Gehaltes voneinander unterscheiden (ibid., S. 229). Da zudem diese syntaktischen Sätze nicht mehr länger unpräzise sind, unterscheiden sie sich bezüglich ihres Gehaltes auch vom ursprünglichen Pseudo-Objektsatz selbst. Da die philosophischen Sätze vielfach mehrdeutig und unklar sind, wird daher im Allgemeinen eine syntaktische Übersetzung einer philosophischen These auch nur den Status eines Vorschlages haben.

Nehmen wir nun also an, dass wir uns entschieden haben, den folgenden syntaktischen Satz als Übersetzung von 1) zu akzeptieren:

[133] Es ist klar, dass die von mir gegebenen Charakterisierungen dieser drei Klassen von Sätzen keinen Anspruch auf Exaktheit haben können. Diese Charakterisierungen sind sogar in Pseudo-Objektsätzen ausgedrückt und sie sind daher in hohem Masse klärungsbedürftig. Carnap versuchte denn in der *Logischen Syntax* auch, diese drei Klassen von Sätzen in präziser Weise zu charakterisieren (Carnap, 1934a, S. 210–213). Allerdings ist es für die folgende Diskussion nicht notwendig, auch diese präziseren Charakterisierungen zu diskutieren.

2) Die Zahlausdrücke sind Klassenausdrücke zweiter Stufe.

Diese Übersetzung lässt jedoch noch immer eine Vielzahl verschiedener Interpretationen zu: So kann 2) erstens als einen Vorschlag interpretiert werden. 2) kann also so aufgefasst werden, dass damit vorgeschlagen wird, dass zu gewissen näher zu bestimmenden Zwecken eine Sprachform verwendet werden sollte, in der die Zahlausdrücke Klassenausdrücke zweiter Stufe sind. Wird 2) in dieser Weise interpretiert, so ist „eine Diskussion über Wahrheit oder Falschheit ... gänzlich verfehlt, ein leerer Wortstreit“ (ibid., S. 226). Es ist dann nur möglich, über die Zweckmässigkeit des Vorschlages zu diskutieren und die Konsequenzen des Vorschlages zu untersuchen (ibid.). Zweitens kann 2) aber auch als eine Behauptung über syntaktische Eigenschaften interpretiert werden. Wird 2) so interpretiert, so ist zusätzlich anzugeben, für welche Sprache oder für welche Art von Sprachen die Behauptung gelten soll (ibid., S. 225–226). So können wir 2) zum Beispiel als die falsche Behauptung interpretieren, dass in jeder Sprachform die Zahlausdrücke Klassenausdrücke zweiter Stufe sind. Wir können 2) aber auch als die richtige Behauptung interpretieren, dass es Sprachen gibt, in denen die Zahlausdrücke Klassenausdrücke zweiter Stufe sind. Da nach Carnap die meisten Thesen, die im Zusammenhang mit den „sogenannten philosophischen oder logischen Grundlagenproblemen der einzelnen Wissenschaften“ vertreten werden, von derselben Art sind wie die These 1) (ibid., S. 250), sind diese Thesen also grösstenteils zu verstehen als Vorschläge, gewisse Sprachformen zu konstruieren, oder als Behauptungen über die syntaktischen Eigenschaften einer oder mehrerer Sprachen.

Ausgehend von den in den letzten Abschnitten entwickelten Unterscheidungen kann die von Carnap in der *Logischen Syntax* vorgeschlagene Theorie der Klärung von Sätzen wie folgt zusammengefasst werden: Ein Objektsatz ist dadurch zu klären, dass die Sprache der Spezialwissenschaft, zu der der Satz gehört, einer logischen Analyse unterzogen wird. Ein Pseudo-Objektsatz ist dadurch zu klären, dass er in einen syntaktischen Satz übersetzt wird. Der resultierende Satz ist dann in derselben Weise weiter zu klären wie auch die übrigen syntaktischen Sätze, das heisst durch die Festsetzung, ob dieser Satz einen Vorschlag oder eine Behauptung zum Ausdruck bringen soll, und durch die Angabe, auf welche Sprachen er sich beziehen soll.

Ein mögliches Resultat der Klärung von 1) ist somit der folgende Satz:

3) Es ist möglich einen Kalkül zu konstruieren, in dem die Zahlausdrücke Klassenausdrücke zweiter Stufe sind.

Der Satz 3) ist eine korrekte und präzise formulierte Version einer These, die von gewissen Logizisten vertreten wurde. Doch bedeutet dies, dass 3) zusammen mit weiteren Behauptungen verwendet werden kann, um die logizistische Position in dem durch die allgemeine Syntax definierten Rahmen zu charakterisieren? Meines Erachtens ist dies nicht der Fall. In der *Logischen Syntax* unterschied Carnap zwischen Fragen von philosophischer Bedeutsamkeit und Fragen der technischen Zweckmässigkeit (ibid., S. 255). Und da wir, wenn wir den Logizismus zu charakterisieren versuchen, gerade eine philosophisch signifikante Position charakterisieren wollen, sollten wir in unserer Charakterisierung keine Behauptungen verwenden, die einzig Fragen der technischen Zeckmässigkeit betreffen. Zusätzlich kann es gemäss der *Logischen Syntax* nicht einmal als eine Frage von philosophischer Bedeutsamkeit gelten, ob beim Aufbau eines logisch-mathematischen Systems nur logische Zeichen im engeren Sinn oder ob dabei auch genuin mathematische Zeichen als Grundzeichen verwendet werden (ibid.). Daher ist es klar, dass dasselbe auch für die Frage gilt, ob ein Kalkül zu verwenden ist, für den die These 2) gilt, oder aber ein Kalkül, in dem die Zahlausdrücke zu irgendeiner anderen syntaktischen Kategorie gehören.

Wie aber kann in präziser Weise zwischen philosophischer Bedeutsamkeit und technischer Zweckmässigkeit unterschieden werden? Soll der Unterschied zwischen zwei Sprachformen philosophische Signifikanz besitzen, so muss es hinsichtlich gewisser praktischer Zwecke einen Unterscheid machen, welche der beiden Sprachformen verwendet wird. Allerdings kann einer Sprachform S gegenüber einer Sprachform S' bezüglich gewisser Zwecke noch immer aus zwei verschiedenen Gründen der Vorzug gegeben werden: i) Nur die Verwendung von S und nicht auch die Verwendung von S' ist für die gegebenen Zwecke zweckdienlich. ii) Die Verwendung beider Sprachformen ist für die gegebenen Zwecke zweckdienlich, doch die Verwendung der Sprache S ist einfacher und praktischer als die Verwendung von S'. Die Differenz zwischen zwei Sprachformen ist daher nur dann von philosophischer Bedeutsamkeit, wenn es Zwecke gibt, so dass bezüglich dieser Zwecke die eine Form der anderen aus dem Grund i) vorzuziehen ist. Ansonsten besitzt diese Differenz höchstens technische Signifikanz und dies ist dann der Fall, wenn die Verwendung der einen Sprachform der anderen dennoch aus dem Grund ii) vorzuziehen ist.

Doch betrachten wir nun eine Behauptung, die Sprachen mit gewissen syntaktischen Eigenschaften als konstruierbar hinstellt. Unter welchen Bedingungen sollten wir sagen, dass diese Behauptung philosophische Signifikanz besitzt? Offenkundig besitzt die Behauptung nur dann philosophische Signifikanz, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind: Wir können uns erstens Zwecke vorstellen, so dass es für diese Zwecke zweckdienlich ist, eine Sprachform zu verwenden, die die fraglichen syntaktischen Eigenschaften besitzt. Zweitens besitzen nicht alle möglichen Sprachformen die fraglichen syntaktischen Eigenschaften. Der Grund dafür, dass diese zweite Bedingung aufzustellen ist, besteht darin, dass syntaktische Eigenschaften, die allen möglichen Sprachformen zukommen, nicht verwendet werden können, um in dem durch die allgemeine Syntax festgelegten Rahmen eine Unterscheidung zu machen. Behauptungen, die solche Eigenschaften betreffen, können daher nicht benutzt werden, um in diesem Rahmen eine Position auszuzeichnen. Vielmehr charakterisieren solche Eigenschaften den allgemeinen Rahmen selbst, der in der allgemeinen Syntax aufgebaut wird, und also den Rahmen, innerhalb dessen überhaupt erst präzise definierte Sprachformen konstruiert werden können.

In den folgenden Kapiteln 5.3–5.6 werde ich die in den vorhergehenden Abschnitten diskutierte Methode der Klärung auf Thesen anwenden, die in der logizistischen Tradition vertreten wurden, und insbesondere auf die Thesen, die Carnap 1930 als charakteristisch für die logizistische Position erachtete. Dadurch werde ich versuchen, die folgende Behauptung zu begründen: Wenn wir die logizistische Position ausgehend von einer Konzeption zu klären versuchen, die auf dem Toleranzprinzip und einer syntaktischen Auffassung der Logik beruht, und wenn wir zusätzlich alle rein technischen Fragen ignorieren, so bleibt von dieser Position nur eine einzige Forderung übrig. Es handelt sich dabei um die Forderung, dass ein umfassendes Sprachsystem aufzubauen ist, das die empirischen und die formalen Wissenschaften in einer solchen Weise vereint, dass auch die Anwendung der Logik und der Mathematik auf die Empirie ermöglicht und geregelt ist.

5.3 Die Mathematik als Zweig der Logik

Wie bereits in Kapitel 2 diskutiert, war Carnaps Verteidigung des Logizismus im Jahr 1930 in erster Linie ein Versuch, die folgende Behauptung zu begründen:

1) Die gesamte Mathematik ist auf die reine Logik zurückführbar und auf Grund dieser Zurückführbarkeit tautologisch.

Wenn wir den Logizismus durch 1) charakterisieren, so stellen wir diese Position also als einen Versuch dar zu zeigen, dass die mathematischen Wahrheiten logische Wahrheiten sind und gerade aus dem Grund, weil sie logische Wahrheiten sind, tautologisch. Allem Anschein nach besteht somit eine entscheidende Differenz zwischen der These 1) und der folgenden Behauptung:

2) Die gesamte Mathematik hat, wie auch die gesamte Logik, einen rein tautologischen Charakter.

Selbstverständlich folgt 2) logisch aus 1). Doch 1) enthält zudem noch die Idee, dass die tautologische Natur der Mathematik eine Konsequenz ihrer Rückführbarkeit auf die Logik ist. Wie ich jedoch sogleich zeigen werde, kann diese scheinbar entscheidende Differenz zwischen 1) und 2) im Rahmen der *Logischen Syntax* nicht mehr länger als eine philosophisch signifikante Differenz gelten. Die Idee einer privilegierten logischen Basis, die für Carnaps

Philosophie der Mathematik im Jahre 1930 entscheidend war, hat in der *Logischen Syntax* jegliche philosophische Signifikanz eingebüsst.

Um die eben formulierte These zu begründen, sind die Behauptungen 1) und 2) zunächst zu klären. Und um diese Behauptungen zu präzisieren, ist in einem ersten Schritt anzugeben, auf welches logisch-mathematische System wir uns mit 1) und 2) beziehen wollen: Die Sätze 1) und 2) sind ja so formuliert, als ob es nur ein einziges korrektes System der Logik und der Mathematik gäbe. Doch wenn jemand die im Toleranzprinzip empfohlene Einstellung akzeptiert, so wird er gerade nicht mehr behaupten, dass es die wahre Logik gibt (Carnap, 1934a, S. V). Stattdessen wird er behaupten, dass es eine Vielzahl möglicher logischer und mathematischer Systeme gibt, von denen keines korrekter ist als die anderen.

Da die Logizisten typischerweise an der klassischen Logik und der klassischen Mathematik festhalten wollten, besteht der natürlichste Zugang darin, 1) und 2) so zu interpretieren, dass sie sich auf diese Systeme beziehen. Es ist allerdings auch möglich, diese beiden Behauptungen in einer sehr viel allgemeineren Weise zu reformulieren. Die Logizisten behaupten ja nicht nur, dass alle mathematischen Wahrheiten Tautologien sind. Sie behaupten auch, dass alle mathematischen Sätze entweder wahr oder falsch sind und dass alle falschen mathematischen Sätze Kontradiktionen sind. Die resultierende Behauptung, das alle Sätze der reinen Logik und Mathematik Tautologien oder Kontradiktionen sind, kann nun im Rahmen der allgemeinen Syntax als ein syntaktisches Theorem formuliert werden, das für alle möglichen Sprachformen gilt. 1934 verwendete Carnap den Ausdruck ‚analytisch' an Stelle des Terminus ‚tautologisch' und er versuchte die Prädikate ‚analytisch' und ‚kontradiktorisch' in einer solchen Weise zu definieren, dass damit präzise gefasst wird, was man meint, wenn man sagt, dass ein Satz aus rein logischen Gründen wahr (bzw. falsch) ist (ibid., S. 37). Er definierte ‚analytisch' und ‚kontradiktorisch' in etwa in der folgenden Weise: Ein Satz einer Sprache ist analytisch in dieser Sprache, wenn er gemäss den logisch-mathematischen Transformationsregeln der Sprache aus der leeren Satzmenge folgt. Ein Satz einer Sprache ist hingegen kontradiktorisch in dieser Sprache, wenn jeder Satz gemäss der logisch-mathematischen Transformationsregeln der Sprache aus diesem Satz folgt (ibid., S. 135).

Werden diese Definitionen mit der von Carnap gegebenen allgemeinen Charakterisierung der logisch-mathematischen Sätze einer Sprache kombiniert (ibid., § 50), so resultiert das folgende syntaktische Theorem:

3) Die logisch-mathematischen Sätze einer Sprache sind in dieser Sprache analytisch oder kontradiktorisch (ibid., S. 137).

Die Tatsache, dass Carnap die Forderung, dass die logischen und mathematischen Sätze einer Sprache in dieser Sprache logisch determiniert sein müssen, als ein allgemeines syntaktisches Theorem zu formulieren versuchte, bezeugt, dass er auch noch in der *Logischen Syntax* zumindest ansatzweise der logizistischen Tradition verpflichtet war. Diese Forderung ist ja nicht nur durch die Idee motiviert, dass die logischen und mathematischen Wahrheiten unabhängig von den empirischen Tatsachen sind (Awodey, 2007, S. 245), Carnaps syntaktisches Theorem ist auch eine formale Fassung der Idee, dass die logischen und die mathematischen Wahrheiten (bzw. Falschheiten) von der gleichen Art sind. Ein wichtiges Element von Carnaps Logizismus von 1930 ist also in das Rahmenwerk eingebaut, das in der *Logischen Syntax* errichtet wird. Tatsächlich erblickte Carnap in 3) sogar eine Adäquatheitsbedingung für jede akzeptable Definition von ‚analytisch' und von ‚kontradiktorisch' in der allgemeinen Syntax (Carnap, 1934a, S. 132). Dies aber bedeutet eben auch, dass das Theorem 3) nicht verwendet werden kann, um im Rahmen der *Logischen Syntax* eine philosophisch signifikante Position zu definieren.[134]

Wir können uns daher dem Vorschlag zuwenden, dass 1) und 2) dahingehend zu interpretieren sind, dass sie sich auf diejenigen Systeme beziehen, an deren Konstruktion sich die Logizisten vor allem versuchten, also auf die klassische Logik und auf die klassische Mathematik. Dieser Vorschlag ist zweifelsohne der plausibelste Zugang, wenn ausgehend von 1) und von 2) philosophisch signifikante Positionen definiert werden sollen.

Allerdings unterliess es Carnap in der *Logischen Syntax*, eine formale Unterscheidung einzuführen zwischen den logischen Zeichen im engeren Sinn und den genuin mathematischen Zeichen (ibid., S. 255). Er führte also keine syntaktische Unterscheidung ein zwischen den Zeichen, von denen er 1930 geltend gemacht hätte, dass sie zur reinen Logik gehören, und den Zeichen, die ihm damals nicht als akzeptable Grundzeichen in einem logizistischen Aufbau der Mathematik gegolten hätten. Mit Hilfe der in der *Logischen Syntax* tatsächlich definierten Begrifflichkeit ist es daher nicht möglich, die Idee direkt auszudrücken, dass sich die klassische Mathematik auf einer rein logischen Basis aufbauen lässt. Wir können diese Idee nur auf Umwegen in die Betrachtung einbeziehen, und zwar dadurch, dass wir eine Reihe primitiver Zeichen und eine Reihe von Transformationsregeln auflisten und so explizit

[134] Aus diesem Grund ist Ricketts Versuch zu bestimmen, worin der Logizismus gemäss der *Logischen Syntax* besteht, verfehlt. Er schreibt: "I maintain that … logicism also has the status of a proposal: it is the recommendation that candidate languages of science be restricted to those in which sentences constructed from just the logico-mathematical vocabulary are calculus-determinate" (Ricketts, 2007, S. 217). Die von Ricketts formulierte Empfehlung kann jedoch überhaupt nur die Frage betreffen, wie der Begriff der Analytizität in der allgemeinen Syntax zu definieren ist. Solange Carnaps Adäquatheitsbedingung an eine jede akzeptable Definition von Analytizität akzeptiert wird, ist eine solche Empfehlung völlig gehaltleer. Sie ist ja dann gleichbedeutend mit dem Vorschlag, irgendeine Sprache zu verwenden. Bei dieser Empfehlung kann es sich daher nicht, wie von Ricketts behauptet (ibid., S. 218), um Carnaps Explikation des Logizismus in der *Logischen Syntax* handeln. Denn wenn der Logizismus expliziert werden soll, so ist dabei ein Vorschlag zu formulieren, der besagt, dass wir aus dem Bereich der Sprachen, die gemäss den in der allgemeinen Syntax formulierten Beschränkungen konstruiert sind, eine bestimmte Sprachform wählen sollten.

eine Basis spezifizieren, von der wir überzeugt sind, dass sie als eine rein logische gelten kann.

Somit lauten die vielversprechendsten Übersetzungen von 1) und 2) in eine Sprache der Syntax in etwa wie folgt:

4) Ausgehend von der so und so explizit spezifizierten Basis (einer sogenannten rein logischen Basis) ist es möglich einen Kalkül zu konstruieren, zu dessen analytischen Sätze all diejenigen Theoreme gehören, die in der klassischen Mathematik als korrekt erachtet werden.[135]

5) Es ist möglich einen Kalkül zu konstruieren, in dem alle diejenigen Sätze, die in der klassischen Logik und der klassischen Mathematik als korrekt gelten, analytisch sind.[136]

Während nun eine entscheidende Differenz zu bestehen schien zwischen 1) und 2), besteht keine solche Differenz mehr zwischen den syntaktischen Sätzen 4) und 5). Dies kann mit dem folgenden Argument gezeigt werden: Diejenigen Kalküle, die 4) als konstruierbar behauptet, mögen KL-Kalküle genannt werden. Dann werde angenommen, dass zwischen 4) und 5) eine solche signifikante Differenz besteht. Allerdings unterscheiden sich die KL-Kalküle einzig darin von denjenigen Kalkülen, die gemäss 5) konstruierbar sind, dass diese letzteren Kalküle auf einer Basis beruhen können, die auch primitive Elemente enthält, die gemeinhin als genuin mathematische gelten würden. Daher muss es eine Frage der philosophischen Bedeutsamkeit sein, ob eine Basis zu verwenden ist, die nur logische Elemente im engeren Sinn enthält, oder eine, die auch mathematische Elemente enthält. Dies jedoch ist gemäss Carnap nicht der Fall (ibid., S. 255).

Der zusätzliche Gehalt, den 1) im Gegensatz zu 2) zu enthalten scheint, ist somit ohne philosophische Signifikanz. Wenn wir versuchen, eine philosophische Position zu definieren, so spielt es daher keine Rolle, ob wir dazu 4) oder 5) verwenden. Doch kann eine Position, die durch 4) oder durch 5) definiert wird, tatsächlich als philosophisch signifikant gelten? Ich werde die Diskussion dieser Frage auf die folgenden Kapitel verschieben. Zunächst werde ich die entscheidende Prämisse diskutieren, auf der das eben angeführte Argument beruht.[137]

[135] Ich nehme in der folgenden Diskussion an, dass 4) korrekt ist. Allerdings werde ich nicht auf die Frage eingehen, ob diese Annahme berechtigt ist. Es ist jedoch klar, dass ein Kalkül der in 4) beschriebenen Art neben solchen Regeln, wie sie üblicherweise in Logiksystemen höherer Stufen verwendet werden, auch noch indefinite Transformationsregeln enthalten muss (Carnap, 1937, S. 98–101).

[136] Es ist zu beachten, dass die Formulierungen 4) und 5) gemäss den Standards der *Logischen Syntax* nicht als vollständig präzise formuliert gelten können. Sie enthalten ja den Ausdruck ‚als korrekt gelten', der in irgendeiner Weise weiter zu präzisieren wäre.

[137] Richardson hat auch bereits betont, dass Carnap in der *Logischen Syntax* den Logizismus verwarf, wenn dieser als einen Versuch verstanden wird, das mathematische Vokabular im Rahmen eines grundlegenderen logischen Vokabulars zu definieren (Richardson, 1994, S. 76). Allerdings stützt er seine These einzig und allein

Dieses Argument beruht auf der Behauptung, dass die Wahl zwischen einem KL-Kalkül und einem entsprechenden Kalkül, der eine logisch-mathematische Basis besitzt, keine philosophische Signifikanz besitzt. Doch muss diese Prämisse akzeptiert werden? Das Ziel der folgenden Erwägungen ist es zu zeigen, dass diese Frage zu bejahen ist. Da jedoch Carnap selbst diese Problematik in der *Logischen Syntax* nicht diskutierte, stellen diese Erwägungen lediglich einen Versuch dar eine Antwort zu skizzieren, die er auf diese Frage hätte geben können.

Indem wir den Logizismus durch 1) charakterisieren, stellen wir den Logizisten so dar, dass er die Mathematik aus dem Grund auf die Logik zurückführen will, weil er versucht, die in seinen Augen höchst interessante, aber keineswegs ohne Weiteres beantwortbare Frage zu beantworten, ob die Mathematik ebenso tautologisch ist wie die reine Logik. Doch wenn wir ein reduktionistisches Projekt verfolgen, um die Frage zu beantworten, ob die gesamte Mathematik eine gewisse Eigenschaft E besitzt, welche Gründe können wir dann, von einem philosophischen Standpunkt aus gesehen, dafür haben, gerade eine bestimmte Basis in unserem reduktionistischen Projekt zu verwenden und nicht eine andere?

Soll die Bevorzugung einer bestimmten Basis gegenüber einer anderen Basis tatsächlich als eine philosophisch relevante Entscheidung gelten, so kann dies meines Erachtens nur auf dem folgenden Umstand beruhen: Wir sind davon überzeugt, dass einzig und allein die Basis, die wir in der Reduktion verwenden wollen, eine im Zusammenhang mit der Eigenschaft E aufschlussreiche Eigenschaft hat. Das heisst, wir sind davon überzeugt, dass einzig die von uns gewählte Basis eine Eigenschaft E' besitzt, die in dem Sinne aufschlussreich für E ist, dass alles, was auf eine Basis zurückgeführt werden kann, die die Eigenschaft E' besitzt, auch die Eigenschaft E besitzt. Sind wir hingegen davon überzeugt, dass nicht nur die von uns bevorzugte Basis eine solche aufschlussreiche Eigenschaft besitzt, sondern dass auch andere Basen eine solche aufschlussreiche Eigenschaft besitzen, so können wir die Bevorzugung gerade dieser Basis offenkundig nur durch rein technische Erwägungen rechtfertigen. Wir können dann also unsere Wahl nur durch die Behauptung rechtfertigen, dass es ausgehend von der von uns bevorzugten Basis besonders einfach ist zu zeigen, dass die Mathematik die Eigenschaft E besitzt.

Wenn wir den Logizismus durch 1) charakterisieren, so machen wir somit geltend, dass ein Logizist die Eigenschaft, logisch im engeren Sinn zu sein, als die aufschlussreiche Eigenschaft für die Tautologizität erachtet. In der *Logischen Syntax* jedoch klärte Carnap den Begriff der Tautologizität durch seine Definition von ‚analytisch' und gemäss dieser

---

auf die Tatsache, dass Carnap keine Unterscheidung einführte zwischen den logischen Zeichen im engeren Sinn und den mathematischen Zeichen.

Definition ist die Eigenschaft, logisch im engeren Sinne zu sein, nicht die einzige aufschlussreiche Eigenschaft für Analytizität. Die Transformationsregeln, die Carnap in der Konstruktion seiner Sprache II verwendete, sind zum Beispiel offensichtlich nicht logische im engeren Sinn. Dennoch sind alle Sätze, die sich mittels dieser Transformationsregeln aus der leeren Satzklasse ableiten lassen, analytisch in II, und zwar ist dies eine Konsequenz davon, dass diese Transformationsregeln alle logisch-mathematischer Natur sind. Da zudem alle Theoreme der klassischen Mathematik in II aus der leeren Satzklasse resultieren, ist also die klassische Mathematik in II aus dem Grund analytisch, weil sie auf eine logisch-mathematische Basis zurückgeführt werden kann. Somit ist gemäss der *Logischen Syntax* auch die Eigenschaft, logisch-mathematischer Natur zu sein, eine aufschlussreiche Eigenschaft für Analytizität, und daher gibt es, von einem philosophischen Standpunkt aus betrachtet, keinen Grund, die Konstruktion eines KL-Kalküls dem Projekt vorzuziehen, die klassische Mathematik im Rahmen einer solchen Sprache wie der Sprache II zu konstruieren. Da es zudem einfacher zu sein scheint, die klassische Mathematik in einem solchen Kalkül wie der Sprache II zu konstruieren als sie in einem KL-Kalkül aufzubauen, sollten wir uns also im Versuch, die klassische Mathematik als analytisch zu erweisen, aus rein technischen Gründen gegen die Verwendung eines KL-Kalküls entscheiden.[138]

Zusätzlich kann auch das Kriterium für die Unterscheidung zwischen philosophischer Bedeutsamkeit und technischer Zweckmässigkeit herangezogen werden, das ich in Kapitel 5.2 entwickelt habe. Wenn diese Unterscheidung tatsächlich in der dort vorgeschlagenen Weise formuliert werden sollte, so ist es klar, dass die Wahl zwischen einem KL-Kalkül und einer solchen Sprache wie II einzig eine Frage der technischen Zweckmässigkeit ist. Meines Erachtens zumindest ist es höchst unplausibel zu behaupten, dass es unter gewissen Umständen einzig und alleine zweckdienlich ist, einen KL-Kalkül zu verwenden und nicht auch einen entsprechenden Kalkül, der auf einer logisch-mathematischen Basis beruht.

In der *Logischen Syntax* bleibt also nichts übrig von der Idee, dass die tautologische Natur der Mathematik eine Konsequenz ihrer Rückführbarkeit auf eine Basis ist, die in irgendeinem ausgezeichneten Sinne eine rein logische ist. Der von Carnap definierte Begriff der Analytizität ist nicht, wie es der Begriff der Tautologie scheinbar war, mit der Idee einer Rückführung auf eine solch privilegierte logische Basis verknüpft.

[138] Carnaps Bevorzugung der Sprache II gegenüber einer solchen Sprachform wie derjenigen der *Principia* ist also aus Gründen der technischen Zweckmässigkeit vollständig gerechtfertigt.

5.4 Die Analytizität der Mathematik

Wie gerade in Kapitel 5.3 gezeigt, läuft die Kernidee von Carnaps Logizismus von 1930 – dass die Mathematik auf Grund ihrer Rückführbarkeit auf die Logik tautologisch ist – in der *Logischen Syntax* lediglich auf die folgende Behauptung hinaus:

1) Es ist möglich einen Kalkül zu konstruieren, der die klassische Logik und die klassische Mathematik in einer solchen Weise enthält, dass all diejenigen Sätze, die in diesen Disziplinen als korrekt erachtet werden, in diesem Kalkül analytisch sind.

Allerdings ist 1) in einer wichtigen Hinsicht redundant. Es besteht nämlich kein signifikanter Unterschied zwischen 1) und der folgenden These:

2) Es ist möglich einen Kalkül zu konstruieren, der die klassische Logik und die klassische Mathematik enthält.

Dass zwischen 1) und 2) kein signifikanter Unterschied besteht, kann gezeigt werden, indem die folgende Frage untersucht wird: Was heisst es für einen Kalkül, die klassische Logik und die klassische Mathematik zu enthalten? Auch wenn Carnap in der *Logischen Syntax* keine explizite Antwort auf diese Frage gab, ist es meines Erachtens dennoch klar, dass er davon überzeugt war, dass ein solcher Kalkül all diejenigen Sätze, die in der klassischen Logik und Mathematik als korrekt gelten, als analytische Sätze enthalten muss. Insbesondere muss ein solcher Kalkül also die klassische Logik und die klassische Mathematik als logisch-mathematische Systeme enthalten.

Diese Forderung ist allerdings nicht so trivial wie es vielleicht den Anschein haben kann. So könnte man ja argumentieren, dass Gödel mit seinem Unvollständigkeitssatz gezeigt hat, dass gewisse korrekte Sätze der klassischen Mathematik nicht mittels der Deduktionsmethode der klassischen Mathematik bewiesen werden können. Da ein Kalkül, der eine Formalisierung der klassischen Mathematik ist, dann also korrekte Sätze enthalten würde, die nicht analytisch sind, würde es sich bei einem solchen Kalkül gemäss den von Carnap in der *Logischen Syntax* aufgestellten Standards also nicht um ein logisch-mathematisches System handeln. Denn gemäss der *Logischen Syntax* ist ja ein logisch-mathematisches System gerade dadurch ausgezeichnet, dass alle seine Sätze analytisch oder kontradiktorisch sind (Carnap, 1934a, S. 130–l32). Allerdings zeigte Gödel in Carnaps Augen mit seinem Unvollständigkeitssatz nicht, dass die Deduktionsmethode der klassischen Mathematik unvollständig ist. Gemäss Carnap zeigte Gödel mit diesem Satz lediglich, dass gewisse Versuche, diese Methode zu formalisieren, unvollständig sind.[139]

[139] Aus diesem Grund unterschied Carnap in der *Logischen Syntax* zwischen zwei Deduktionsverfahren: dem Verfahren der Ableitung, das auf definiten Regeln basiert, und dem Verfahren der Folgereihe, das auch indefinite Schritte und unendliche Klassen von Prämissen zulässt (Carnap, 1937, S. 99–100).

In der *Logischen Syntax* versuchte Carnap, die syntaktischen Prädikate ‚analytisch' und ‚kontradiktorisch' für seine Sprache II in einer solchen Weise zu definieren, dass die folgende Bedingung erfüllt ist: Ein logisch-mathematischer Satz von II ist dann und nur dann analytisch (bzw. kontradiktorisch), wenn dieser Satz in der klassischen Mathematik aus rein logisch-mathematischen Gründen korrekt (bzw. falsch) ist (Carnap, 1937, S. 100–101; S. 124).[140] Zusätzlich ergibt sich aus Carnaps Definitionen, dass jeder logisch-mathematische Satz von II entweder analytisch oder kontradiktorisch in II ist (ibid., S. 116). Deshalb können wir schliessen, dass in Carnaps Auffassung alle korrekten Sätze der Mathematik aus rein logisch-mathematischen Gründen korrekt sind. Soll eine in der Praxis verwendete Sprache formal durch einen Kalkül repräsentiert werden, so muss aber der Begriff der Analytizität für diesen Kalkül in einer solchen Weise definiert werden, dass genau diejenigen Sätze des Kalküls analytisch sind, die gemäss dem gewöhnlichen Verständnis der Sprache aus rein logisch-mathematischen Gründen als richtig gelten (ibid., S. 181). Soll ein Kalkül eine Formalisierung der klassischen Logik und der klassischen Mathematik sein, so muss deshalb für diesen Kalkül der Begriff der Analytizität in einer solchen Weise definiert werden, dass genau die Formeln dieses Kalküls analytisch sind, die korrekten Sätzen der klassischen Mathematik entsprechen.

Ich behaupte keineswegs, dass Carnap glaubte, dass es die eine korrekte Definition des Begriffs der Analytizität für II oder die eine kanonische Metasprache gibt, in der dieser Begriff zu definieren ist. Er war sich sehr wohl der Tatsache bewusst, dass zur Beschreibung der Syntax einer Sprache verschiedene Metasprachen verwendet werden können und dass es von der Stärke der verwendeten Metasprache abhängt, welche syntaktischen Begriffe in dieser Sprache überhaupt definiert werden können (Carnap, 1934a, S. 46). Ich behaupte aber dennoch, dass Carnap der Ansicht war, dass wir, wenn wir einen Kalkül konstruieren wollen, der die klassische Logik und Mathematik enthalten soll, eine hinreichend starke Metasprache verwenden müssen, in der der Begriff der Analytizität in einer solchen Weise definiert werden kann, dass alle relevanten logisch-mathematischen Sätze dieser Definition gemäss analytisch sind.

Die Resultate, die bisher in diesem Kapitel 5 erzielt wurden, können wie folgt zusammengefasst werden: Die Idee, dass die Logik und die Mathematik tautologisch sind, lässt sich gemäss der in der *Logischen Syntax* vertretenen Konzeption in der folgenden Weise als Vorschlag formulieren: Es ist ratsam, für gewisse Zwecke eine Sprachform zu verwenden, in der die klassische Logik und die klassische Mathematik analytisch sind. Zudem ist es auch

[140] Die folgende Diskussion beruht auf Argumenten, die sich im deutschen Original der *Logischen Syntax* von 1934 noch nicht finden, sondern erst in der 1937 publizierten englischen Übersetzung eingefügt wurden.

höchst plausibel zu behaupten, dass dieser Vorschlag philosophische Signifikanz besitzt. Denn es ist ja kaum zu bezweifeln, dass eine solche Sprachform etwa einer intuitionistischen Sprachform in gewissen Teilen der empirischen Wissenschaften vorzuziehen ist. Allerdings ist es nicht der Fall, dass durch die Verwendung des Wortes ‚analytisch' in der Formulierung dieses Vorschlages etwas philosophisch Signifikantes ausgedrückt wird. Das eben formulierte Argument hat gezeigt, dass dieser Vorschlag genauso gut wie folgt formuliert werden kann: Es ist ratsam, für gewisse Zwecke eine Sprache zu verwenden, die die klassische Logik und die klassische Mathematik enthält. Und da die Verwendung des Wortes ‚analytisch' beim Versuch, den Logizismus zu charakterisieren, suggeriert, dass gerade mit diesem Wort etwas Entscheidendes ausgedrückt wird, sollten wir also diese zweite Formulierung bevorzugen.[141]

Es ist klar, dass die Tatsache, dass Carnap keinen Unterschied machte zwischen diesen beiden Formulierungen jenes Vorschlages, sowie auch die Tatsache, dass er die logisch-mathematischen Sätze einer Sprache als analytisch oder kontradiktorisch erachtete, zeigen, dass er auch noch in der *Logischen Syntax* an Gedanken anknüpfte, die seinen Logizismus von 1930 prägten. Jedoch leiten diese Gedanken die Konstruktion des allgemeinen Rahmenwerkes, das Carnap in seiner allgemeinen Syntax zu konstruieren versuchte. Und dies hat die Konsequenz, dass die Kernidee von Carnaps Logizismus von 1930 nur mehr noch auf den Vorschlag hinausläuft, dass wir, wenn wir gewisse Zwecke verfolgen, eine Sprache verwenden sollten, die die klassische Logik und die klassische Mathematik enthält.

5.5 Die Forderung nach einer Bedeutungsbestimmung

Es ist allerdings möglich, den eben diskutierten Vorschlag zu verschärfen, und zwar dadurch, dass ein weiterer Aspekt in die Betrachtung mit einbezogen wird. Wie bereits in Kapitel 2.7 erwähnt, machte Carnap 1930 auch geltend, dass die Logizisten insbesondere versuchen, die folgende Forderung zu erfüllen:

1) Die Mathematik ist in einer solchen Weise zu konstruieren, dass sie auch in den empirischen Wissenschaften angewendet werden kann.

Doch wie kann 1) syntaktisch reformuliert werden? Von einem syntaktischen Gesichtspunkt aus gesehen, ist 1) die Forderung nach einem Kalkül, der „das Rechnen mit

[141] Aus diesem Grund ist Friedmans Versuch, den Logizismus im Rahmen der *Logischen Syntax* zu charakterisieren, zumindest irreführend. Er schreibt: „Logicism … is the proposal to use both classical logic and mathematics in a formulation that makes it clear that logical and mathematical rules are of the same kind – that they are, in an appropriate sense, analytic" (Friedman, 2004, S. 111). Diese Charakterisierung des Logizismus scheint zumindest zu implizieren, dass wir im Rahmen der *Logischen Syntax* auch den Vorschlag machen könnten, eine Formulierung der klassischen Logik und der klassischen Mathematik zu verwenden, die den Verdacht erwecken kann, dass die Theoreme dieser Disziplinen nicht analytisch sind. Wie ich jedoch eben gezeigt habe, können wir uns gemäss Carnap einzig und allein fragen, ob eine Sprache die klassische Logik und die klassische Mathematik überhaupt enthält oder nicht.

Anzahlen empirischer Gegenstände und mit Maßzahlen empirischer Größen ermöglicht“ und regelt (Carnap, 1934a, S. 254). Da Regeln, die solche Berechnungen regeln und ermöglichen, nichts anderes sein können als gewisse Form- und Umformungsbestimmungen, können wir 1) also mit dem folgenden Vorschlag gleichsetzen:

2) Es ist ratsam, für gewisse Zwecke einen Kalkül zu verwenden, der Formbestimmungen für das Auftreten von mathematischen Zeichen in synthetischen Sätzen enthält sowie auch Umformungsbestimmungen für solche Sätze.

Ausgehend von Behauptungen, die Carnap 1930 als charakteristisch für die logizistische Position erachtete, lässt sich also im Rahmen der Konzeption der *Logischen Syntax* der folgende Vorschlag formulieren:

3) Es ist ratsam, für gewisse Zwecke eine umfassende Sprachform zu verwenden, die nicht nur die klassische Logik und die klassische Mathematik enthält, sondern auch syntaktische Regeln für die Verwendung logisch-mathematischer Zeichen in synthetischen Sätzen.

Es ist offensichtlich, dass eine Position, die den Vorschlag 3) macht, als eine philosophisch signifikante Position gelten kann. Zudem ist 2) nicht nur eine formale Version der Forderung, dass die Anwendung der Mathematik möglich sein soll. Gemäss Carnap ist 2) zudem eine formale Version der folgenden Forderung, die er um 1930 auch als eine der zentralen Behauptungen des Frege-Russellschen Logizismus erachtete (Hahn et al. 1931, S. 141):

4) Die Mathematik ist in einer solchen Weise aufzubauen, dass alle ihre Zeichen eine bestimmte, angebbare Bedeutung besitzen.

In der *Logischen Syntax* versuchte Carnap mit dem folgenden Argument zu zeigen, dass 4) in Tat und Wahrheit die Forderung nach syntaktischen Regeln ist, die die Verwendung mathematischer Zeichen in synthetischen Sätzen regeln (Carnap, 1934a, § 84):

Der Logizist fordert, dass die mathematischen Zeichen eine bestimmte Bedeutung haben sollen, weil er fordert, dass sich die Mathematik auch auf die Wirklichkeit anwenden lassen muss. Der Logizist macht somit die folgende Behauptung: Man muss die Bedeutung der mathematischen Zeichen bestimmen, damit die Mathematik auf die Wirklichkeit angewendet werden kann.[142] Wird diese Behauptung so formuliert, so wird allerdings ein Pseudo-Objektsatz verwendet. Daher ist diese Formulierung dadurch zu klären, dass sie in einen syntaktischen Satz übersetzt wird. Das Resultat dieser Übersetzung lautet wie folgt:

[142] Ein Logizist, der diese Behauptung explizit machte, ist Frege. In seinen *Grundgesetzen* schrieb er: “Warum kann man von arithmetischen Gleichungen Anwendungen machen? Nur weil sie Gedanken ausdrücken. Wie könnten wir eine Gleichung anwenden, die nichts ausdrückte, nichts wäre als eine Figurengruppe, die nach gewissen Regeln in eine andere Figurengruppe umgewandelt werden könnte!” (Frege, 1903, S. 100).

5) Dadurch, dass Anwendungsregeln für die mathematischen Zeichen aufgestellt werden, wird eine Deutung der Mathematik festgelegt (ibid., S. 255).

Da Anwendungsregeln Form- und Umformungsbestimmungen für synthetische Sätze sind, die mathematische Zeichen enthalten, kann 5) in der allgemeinen Syntax bewiesen werden: Carnap definierte in der *Logischen Syntax* eine Deutung syntaktisch als eine Übersetzung einer Sprache in eine andere Sprache (ibid., S. 170–172) und die Anwendungsregeln definieren eine Übersetzung des logisch-mathematischen Kalküls in eine umfassendere Sprache, die auch synthetische Sätze enthält. Da diese Anwendungsregeln nicht zu einem Kalkül der reinen Mathematik gehören, sondern zu der Syntax einer Gesamtsprache, fordert der Logizist also tatsächlich:

6) Es ist die Syntax einer Gesamtsprache zu konstruieren, die sowohl logisch-mathematische Sätze als auch die synthetischen Sätze der angewandten Mathematik enthält (ibid., S. 255).

Dieses Argument, mit dem die Behauptung gestützt werden soll, dass die Forderung nach einer Bedeutungsbestimmung auf 6) hinausläuft, beruht in entscheidender Weise auf einem Übergang von einem Pseudo-Objektsatz zu einem syntaktischen Satz. Mit diesem Übergang wird die Beziehung geklärt, die zwischen der Anwendbarkeit der Mathematik und der Forderung nach einer Bedeutungsbestimmung besteht: Wenn in einer inhaltlichen Redeweise behauptet wird, dass die mathematischen Zeichen eine bestimmte Bedeutung haben müssen, damit die Mathematik auf die Wirklichkeit angewendet werden kann, so scheint eine Bedeutungsbestimmung dieser Zeichen die unverzichtbare Vorbedingung für die Möglichkeit einer Anwendung zu sein. 5) jedoch zeigt, dass die Bestimmungen, die die Anwendung der Mathematik ermöglichen und regeln, gerade auch die Bedeutung der mathematischen Zeichen festlegen.

In der *Logischen Syntax* verwendete Carnap die Forderung 6), um die logizistische Position zu definieren (ibid.), und die Thesen, die ich soweit in diesem Kapitel 5 diskutiert habe, erlauben es auch nicht, eine wesentlich substantiellere Charakterisierung dieser Position zu geben. Tatsächlich besteht die einzige nennenswerte Differenz zwischen der von Carnap gegebenen Charakterisierung und derjenigen, die ich soweit entwickelt habe, darin, dass Carnaps Charakterisierung nicht bestimmt, welches logisch-mathematische System genau zur Debatte steht.

Wenn jedoch die in der *Logischen Syntax* entwickelte Theorie der Klärung philosophischer Thesen vorausgesetzt wird, so können diese Charakterisierungen dennoch als formale Versionen gewisser Behauptungen gelten, die in der logizistischen Tradition vertreten wurden. Selbstverständlich heisst dies noch nicht, dass Carnaps syntaktische

Charakterisierung 6) tatsächlich als eine präzise Fassung der traditionellen logizistischen Position angesehen werden kann. Vielleicht trifft ja diese Charakterisierung auch noch auf andere Position zu, so dass Carnap also besser eine andere Bezeichnung als ‚Logizismus' gewählt hätte. Allerdings werde ich die Diskussion dieser Problematik auf das Kapitel 5.7 verschieben. Zunächst werde ich noch einige weitere Thesen untersuchen, die von den Logizisten verfochten wurden.

Es ist entscheidend zu beachten, dass eine Vielzahl verschiedener Sprachformen Carnaps syntaktische Version der Forderung nach einer Bedeutungsbestimmung erfüllt. Diese Forderung wird zum Beispiel von solch logizistischen Sprachformen wie derjenigen der *Principia Mathematica* erfüllt: Die Definitionen der *Principia* können so verstanden werden, dass sie eine Deutung der Mathematik im Rahmen einer Gesamtsprache geben, die auch die Formulierung aller empirischen Wissenschaften erlaubt (ibid., S. 254). Das System der *Principia* begründet also auch noch gemäss der *Logischen Syntax* den Logizismus, jedoch nicht mehr, wie es noch 1930 der Fall war, weil es die Mathematik als Zweig der Logik erweist, sondern weil es Anwendungsregeln liefert. Allerdings wird Carnaps syntaktische Version der Forderung nach einer Bedeutungsbestimmung nicht nur von solch logizistischen Sprachformen erfüllt. Zum Beispiel erfüllt auch die Sprache II der *Logischen Syntax* diese Forderung.

Es stellt sich aus diesem Grund die Frage, ob sich die syntaktische Version dieser Forderung nicht noch in irgendeiner Weise verschärfen lässt. Gemäss der *Logischen Syntax* ist jedoch die Forderung nach einer Bedeutungsbestimmung die Forderung nach einer Deutung. Zudem wird eine Deutung als eine syntaktische Korrelation zwischen zwei Sprachen definiert und daher läuft die trivialste Reformulierung dieser Forderung lediglich auf die Behauptung hinaus, dass es nötig ist, eine gewisse Korrelation zwischen der mathematischen Sprache und einer anderen Sprache aufzustellen. Carnap verschärfte diese triviale Version, indem er auch das Motiv in die Betrachtung einbezog, das die Logizisten dazu bringt, eine Deutung zu fordern. Er machte ja geltend, dass die Forderung nach einer Bedeutungsbestimmung eine Integration der mathematischen Sprache in eine Gesamtsprache der empirischen Wissenschaften verlangt.

Die einzige plausible Weise, diese Forderung weiter zu verschärfen, besteht im Versuch, auch noch die Idee einzubeziehen, dass die Logizisten versuchten, eine solche Integration in einer ganz bestimmten Weise zu erzielen: Die Logizisten versucht ja, eine Deutung der Mathematik dadurch zu geben, dass sie die mathematischen Zeichen in einer solchen Weise definierten, dass diese Zeichen unmittelbar auf Grund der Definitionen in deskriptiven Sätzen verwendet werden können. Jedoch ist dieser scheinbar entscheidende Aspekt des ursprünglichen logizistischen Programms gemäss der *Logischen Syntax* ohne jegliche philosophische Signifikanz: 1934 erachtete es Carnap als eine reine Frage der technischen Zweckmässigkeit, ob eine Sprache verwendet werden soll, die keine undefinierten Zahlzeichen enthält, oder eine solche Sprache wie II, in der gewisse Zahlzeichen als undefinierte Zeichen eingeführt werden und in der daher Form- und Umformungsbestimmungen benötigt werden, damit diese Zeichen auch in deskriptiven Sätzen verwendet werden können (Oberdan, 1993, S. 163–164).[143]

5.6 Die Idee der einen universellen Sprache

Wenden wir uns schliesslich noch der These zu, dass es eine einzige universelle Sprache gibt, die gleichsam der Rahmen alles sinnvollen Redens bildet. Diese These ist ein essentieller Bestandteil der von Frege und Russell vertretenen universalistischen Logikkonzeption. Wie bereits mehrfach erwähnt, spielte diese These zudem in Carnaps Denken in den 1920er Jahren und sogar noch im Rahmen seiner frühen metalogischen Versuche von 1931 eine entscheidende Rolle.

Es gibt allerdings nur einen einzigen Weg, diese These zu klären, der zumindest auf den ersten Blick durchaus erfolgversprechend erscheinen könnte. Nahegelegt wird dieser Klärungsversuch durch die folgende Bemerkung, die Carnap in seiner *Logischen Syntax* machte:

> Wir haben bisher unterschieden zwischen der Objektsprache und der Syntaxsprache, in der die Syntax der Objektsprache formuliert wird. Sind dies notwendig zwei verschiedene Sprachen? Wenn man diese Frage bejaht … , so wird zur Formulierung der Syntax der Syntaxsprache eine dritte Sprache benötigt, usf. ins Unendliche. Nach einer anderen Auffassung … gibt es nur Eine Sprache; was wir Syntax nennen, kann nach dieser Auffassung überhaupt nicht ausgesprochen werden, sondern „zeigt sich“. Im Unterschied zu diesen Auffassungen wollen wir zeigen, daß man tatsächlich mit Einer Sprache auskommt; aber nicht durch Verzicht auf die Syntax, sondern dadurch,

---

[143] Der in diesem Abschnitt gemachte Punkt lässt sich klären, indem die Theorie der impliziten Definitionen herangezogen wird. Frege und Russell argumentierten in der folgenden Weise gegen diese Theorie: Die Umformungsbestimmungen der mathematischen Sprache determinieren die Bedeutung der mathematischen Zeichen nicht. Die Bedeutung dieser Zeichen ist erst vollständig bestimmt, wenn diese Zeichen explizit aus den logischen Grundzeichen definiert wurden. Gemäss der *Logischen Syntax* machten Frege und Russell zu Recht geltend, dass die Umformungsbestimmungen allein noch keine Deutung der mathematischen Sprache liefern. Eine solche Deutung ist erst aufgestellt, wenn angegeben ist, wie die mathematische Sprache in eine umfassendere Sprache zu übersetzen ist. Ob jedoch eine solche Deutung der mathematischen Sprache dadurch gegeben wird, dass die mathematischen Zeichen in rein logischen Zeichen definiert werden, oder in irgendeiner anderen Weise, ist keine Frage von philosophischer Bedeutsamkeit. Gemäss der *Logischen Syntax* betraf daher ein Teil der von Frege und Russell formulierten Kritik an der Theorie der impliziten Definitionen eine Frage, die keine philosophische Signifikanz besitzt.

daß die Syntax dieser Sprache in dieser Sprache selbst formuliert werden kann, ohne daß dadurch ein Widerspruch entsteht. (Carnap, 1934a, S. 46)

Doch können wir die Idee einer universellen Sprache tatsächlich mit dem Vorschlag gleichsetzen, dass wir, wenn wir gewisse Zwecke verfolgen, eine Sprache verwenden sollten, die ihre eigene Syntax enthält? Ein solcher Vorschlag setzt offenkundig voraus, dass es möglich ist, die gesamte Syntax einer Sprache in dieser Sprache zu formulieren. Und dies ist, entgegen dem Eindruck, der die eben zitierte Bemerkung erwecken kann, nicht der Fall. Wie bereits mehrfach erwähnt, ist es ja zum Beispiel nicht möglich, das syntaktische Prädikat ‚analytisch in L' in einer konsistenten Sprache L zu definieren. Zudem ergibt sich gemäss Carnap aus diesen Argumenten, die zeigen, dass ‚analytisch in L' nicht in einer konsistenten Sprache L definierten werden kann, auch direkt, dass ein Zugang zur Mathematik, der nur von einer einzigen Sprache ausgeht, zum Scheitern verurteilt ist. Er bemerkte in der *Logischen Syntax*:

Jedes arithmetische System ist ... lückenhaft. Zwar kann jeder mathematische Begriff in einem geeigneten System definiert werden, und jeder mathematische Satz kann in einem geeigneten System entschieden werden. Aber es gibt kein einzelnes System, das alle mathematischen Begriffe und die Beweise aller gültigen mathematischen Sätze enthielte. Die Mathematik erfordert eine unendliche Reihe immer reicherer Sprachen. (ibid., S. 165)

Die logizistische Idee eines einzigen allumfassenden Sprachsystems ist daher einfach falsch und aus diesem Grund kann dieses scheinbar entscheidende Element des klassischen Logizismus auch nicht verwendet werden, um eine philosophisch signifikante Position zu definieren.

5.7 Logizismus und das Problem der Anwendbarkeit

In den vorhergehenden Kapiteln haben ich die Thesen diskutiert, die im Zentrum von Carnaps Logizismus von 1930 und des Frege-Russellschen Logizismus standen, und ich habe versucht, diese Thesen in syntaktische Sätze zu übersetzen, denen im Rahmen der Konzeption der *Logischen Syntax* philosophische Signifikanz zugeschrieben werden kann. Wenn meine Argumentation schlüssig war, so ist die Beziehung von Carnaps Position von 1934 zu diesen logizistischen Positionen in der folgenden Weise zu beurteilen.

Erstens sind wesentliche Aspekte von Carnaps logizistischer Position von 1930 gleichsam in das Rahmenwerk der allgemeinen Syntax eingebaut. 1930 versuchte Carnap ja, die Wittgensteinsche Analyse der logischen Wahrheit mit der Zurückführbarkeit der Mathematik auf die Logik zu kombinieren, um so die These zu begründen, dass die klassische Logik und die klassische Mathematik tautologisch sind und ohne jeden Gehalt. In der *Logischen Syntax* führte diese These einerseits zu der folgenden Forderung: Die Umformungsbestimmungen eines Kalküls, der die klassische Mathematik enthalten soll, sind so zu wählen, dass diesen Regeln gemäss alle Formeln des Kalküls, die korrekten Sätzen der klassischen Mathematik entsprechen, aus der leeren Satzklasse abgeleitet werden können. Andererseits führte diese These zu der Forderung, dass die logisch-mathematischen Sätze eines jeden Kalküls in diesem Kalkül logisch determiniert sein müssen, das heisst, dass diese Sätze entweder analytisch oder kontradiktorisch im Kalkül sein müssen.

Obwohl Gedanken, die für Carnaps logizistische Position von 1930 zentral waren, auch noch die Konstruktion der allgemeinen Syntax prägten, folgt daraus nicht, dass dasselbe auch für den Frege-Russellschen Logizismus gilt. Weder Frege noch Russell behaupteten, dass die Sätze der Logik und der Mathematik Tautologien sind, die keinen Gehalt besitzen (Uebel, 2005, S. 179). Vielmehr waren sie beide davon überzeugt, dass diese Sätze allgemeinste Wahrheiten sind, die durchaus einen Gehalt besitzen.[144]

Dass die These der gehaltleeren Natur der mathematischen Wahrheiten im Rahmen von Carnaps Position von 1930 als eine genuin logizistische gelten kann, beruht auch einzig und alleine darauf, dass er davon überzeugt war, dass sich diese These nur ausgehend von einem logizistischen Aufbau der Mathematik begründen lässt. Und diese Möglichkeit eines logizistischen Aufbaus der Mathematik spielt im Rahmen der *Logischen Syntax* eben keine Rolle mehr. Auf Grund der allgemeinen Charakterisierung des Begriffs der Analytizität, die Carnap in seiner allgemeinen Syntax gab, ist die Möglichkeit eines solchen Aufbaus vollständig irrelevant. Daher kann auch sein syntaktisches Theorem, dass die logisch-mathematischen Sätze eines Kalküls in diesem Kalkül logisch determiniert sind, lediglich in einem sehr eingeschränkten Umfang als ein Erbe der von Frege und Russell verteidigten logizistischen Konzeption gelten. Tatsächlich stimmt Carnaps syntaktisches Theorem einzig in einer Hinsicht mit der Frege-Russellschen Konzeption überein: Es ist eine formale Version der Idee, dass die logischen und die mathematischen Sätze von derselben Art sind.

Wenn wir zweitens versuchen, eine philosophische Position in dem Rahmen zu definieren, der durch die allgemeine Syntax geliefert wird, und dabei Thesen zu unserem Ausgangspunkt

[144] Allerdings gelangte Russell gegen Ende der 1910er Jahre unter dem Einfluss von Wittgenstein auch zu der Überzeugung, dass die Sätze der Logik Tautologien sind (Russell, 1919, S. 203–205).

wählen, die typischerweise in der logizistischen Tradition vertreten wurden, so ist der folgende Vorschlag das Resultat:

(P) Es ist ratsam, für gewisse Zwecke eine Gesamtsprache zu verwenden, die nicht nur die klassische Logik und die klassische Mathematik enthält, sondern auch Anwendungsregeln für die Verwendung logisch-mathematischer Zeichen in synthetischen Sätzen.

Wie in Kapitel 4.4 diskutiert, ist die Idee, dass eine Erklärung der Anwendbarkeit für ein adäquates Verständnis der Mathematik entscheidend ist, eine wichtige Konstante in Carnaps Denken. Zudem wurde diese Idee auch in der logizistischen Tradition verteidigt. So schrieb zum Beispiel Frege in seinen *Grundgesetzen*: „Nun ist es die Anwendbarkeit allein, was die Arithmetik über das Spiel empor zum Range einer Wissenschaft erhebt. Die Anwendbarkeit gehört also nothwendig dazu" (Frege, 1903, S. 100). Mit dem Vorschlag (P) wird also tatsächlich ein Gedanken herausgegriffen, der in der logizistischen Tradition verteidigt wurde. Ausserdem ist (P) eine formale Version der Forderung, dass die mathematischen Zeichen eine bestimmte, angebbare Bedeutung haben sollen, und (P) fängt auch dasjenige ein, was im Rahmen der Konzeption der *Logischen Syntax* von Idee bleibt, dass die Mathematik auf Grund ihrer Rückführbarkeit auf die Logik tautologisch ist. Eine Position, die den Vorschlag (P) macht, ist also nicht nur philosophisch signifikant, eine solche Position enthält auch Elemente von Carnaps logizistischer Position von 1930 und des Frege-Russellschen Logizismus.

Wie in diesem Kapitel 5 gezeigt, verlieren die Idee einer universellen Sprache, die Forderung, dass die Bedeutung der mathematischen Zeichen durch Definitionen zu bestimmen ist, und die These, dass die Mathematik ein Zweig der Logik ist, ihre philosophische Signifikanz in der *Logischen Syntax* vollständig. Daher ist zu schliessen, dass der Vorschlag (P) die einzige Möglichkeit ist, den Logizismus in einer solchen Weise zu charakterisieren, dass der Position gemäss Carnaps Konzeption von 1934 noch philosophische Signifikanz zugeschrieben werden kann.[145] Die von Carnap in der *Logischen Syntax*

---

[145] Oberdan kommt in seinem Aufsatz *The Synthesis of Logicism and Formalism* zu dem Schluss, dass im Rahmen der *Logischen Syntax* vom Logizismus nichts mehr übrigbleibt, was von Interesse ist. Er stützt diese Konklusion auf die folgenden zwei Behauptungen: 1.) 1934 verwarf Carnap die logizistische Idee einer universellen Sprachform. 2.) In der *Logischen Syntax* gilt es als eine rein technische Frage, ob die Bedeutung der mathematischen Zeichen durch explizite Definitionen bestimmt wird oder nicht (Oberdan, 1993, S. 162–167). Diese Behauptungen sind beide korrekt und es daher ebenfalls korrekt, dass wichtige Elemente des Frege-Russellschen Logizismus in der *Logischen Syntax* ihre philosophische Signifikanz verloren haben. Oberdans Schlussfolgerung ist aber dennoch zu drastisch. Wie in diesem Kapitel 5 gezeigt, ist es ja durchaus möglich, gewisse Thesen, die in der logizistischen Tradition vertreten wurden, im Rahmen der *Logischen Syntax* als syntaktische Thesen zu reformulieren, denen so etwas wie philosophische Signifikanz zugeschrieben werden kann.

vorgenommene Gleichsetzung des Logizismus mit der Forderung (P) ist also keineswegs unmotiviert.

Dennoch kann der Vorschlag (P) nicht verwendet werden, um die logizistische Position zu definieren. Denn die Logizisten waren nicht die einzigen, die eine Erklärung der Anwendbarkeit der Mathematik forderten. Insbesondere forderten auch einige Neukantianer in aller Entschiedenheit eine solche Erklärung: Cassirer behauptete im Jahr 1907, dass das zentrale Problem der Erkenntnistheorie die Frage ist, welche Rolle mathematische Prinzipien in unserer Konstruktion der Wirklichkeit spielen. Und er forderte aus diesem Grund, dass die Philosophie sich nicht auf die Mathematik oder auf die Physik allein konzentrieren darf, sondern sich gerade auf den Zusammenhang zwischen diesen beiden Gebieten konzentrieren sollte (Cassirer, 1907, S. 48).[146]

Somit ist die Forderung nach einer Erklärung der Anwendbarkeit keine genuin logizistische Forderung. Da im Rahmen der Konzeption, die in der *Logischen Syntax* entwickelt wird, vom Logizismus einzig diese Forderung bleibt, ist also die Konsequenz zu ziehen, dass es in diesem Rahmen nicht möglich ist, eine philosophisch signifikante Position zu definieren, die es verdienen würde, als genuin logizistisch bezeichnet zu werden.

Tatsächlich lässt sich die eben entwickelte Konklusion noch verschärfen. Zwar ist es nicht unplausibel zu behaupten, dass es Frege war, der Carnap dazu brachte, die Rolle der Mathematik in den empirischen Wissenschaften als ein zentrales philosophisches Problem einzustufen. Insbesondere führt Carnap selbst es ja in seiner Autobiographie auf den Einfluss Freges zurück, dass er zu dieser Einsicht gelangte (Carnap, 1963a, S. 12). Dennoch erlaubt es die Forderung nach einer Erklärung der Anwendbarkeit allein nicht geltend zu machen, dass Carnaps Philosophie der Logik und der Mathematik in entscheidender Weise geprägt war vom Einfluss dieses Logizisten.

Insbesondere eine Tatsache legt nahe, dass Carnaps Betonung dieser Forderung auch ausgehend vom neukantianischen Hintergrund seines Frühwerks verstanden werden kann: Wie in Kapitel 4.3 diskutiert, war Carnaps Frühwerk von den Schriften solcher Neukantianer wie Cassirer beeinflusst und damit von Neukantianern, die diese Forderung auch erhoben. Weiter gestützt wird diese Vermutung durch Carnaps Dissertation *Der Raum*: In seiner Dissertation behauptete Carnap nämlich, dass die formalen geometrischen Strukturen, die in der Mathematik untersucht werden, einzig für die Anwendung in der Physik konstruiert werden (Carnap, 1922a, S. 61), und als Beleg für diese Behauptung verwies er nicht etwa auf die Schriften von Frege oder von Russell, sondern auf Cassirers Aufsatz *Kant und die*

[146] Es war ein anonymer Gutachter der Zeitschrift *Grazer Philosophische Studien*, der mich darauf aufmerksam gemacht hat, dass auch Cassirer betonte, dass eine Erklärung des Zusammenhanges von Mathematik und empirischer Wissenschaft ein zentrales Problem der Philosophie ist.

moderne Mathematik (Carnap, 1922a, S. 81, Fussnote zu S. 61).

Am Anfang seiner philosophischen Karriere in den frühen 1920er Jahren verfolgte Carnap denn auch ein Projekt, in dessen Rahmen die Forderung nach einer Erklärung der Anwendbarkeit eng verknüpft war mit Gedanken, die für die neukantianische Tradition charakteristisch sind. Bereits zu dieser Zeit war er zu der Überzeugung gelangt, dass es die Aufgabe der Philosophie ist, ein einheitliches System alles Wissens zu konstruieren (Carus, 2007, S. 92). In einem solchen umfassenden System müssen offensichtlich auch die formalen Wissenschaften – die deduktive Logik und die Mathematik – einen Platz finden und in einen Zusammenhang mit den empirischen Wissenschaften gebracht werden. Somit resultiert Carnaps Forderung nach einer Erklärung der Anwendbarkeit der Mathematik auch aus seiner umfassenderen Forderung nach einer Vereinheitlichung und Systematisierung des gesamten wissenschaftlichen Wissens. Zusätzlich bediente sich Carnap in seinen frühesten Versuchen, ein solch einheitliches System zu konstruieren, nicht nur neukantianischer Gedanken, seine Auffassung davon, was ein solch einheitliches System auszeichnet, war unvereinbar mit der von Frege und Russell formulierten universalistischen Logikkonzeption.

Zu dieser Zeit behauptete Carnap nämlich, dass ein Begriffssystem der Wissenschaften ein Kategoriensystem voraussetzt, das die Einheit aller Wissenschaften allererst begründet. Zusätzlich war er davon überzeugt, dass dieses Kategoriensystem von der deduktiven Logik vorausgesetzt wird und daher im Rahmen einer transzendentalen Logik zu begründen ist (ibid., S. 103–104). In Übereinstimmung mit Natorps Kritik am Logizismus machte er geltend, dass die deduktive Logik, auf die Frege und Russell die Mathematik zurückführten, nicht der grundlegendste Disziplin der Logik sein kann, weil sie den Begriff des Gegenstands schon als gegeben voraussetzt (ibid., S. 97). Dies bedeutet keineswegs, dass der Logizismus für Carnaps Projekt eines einheitlichen und umfassenden Begriffssystem in den frühen 1920er Jahren vollständig irrelevant war. Sein Versuch, ein solches System zu errichten, war zweifelsohne inspiriert von der logizistische Kernthese, der gemäss die Logik und die Mathematik eine Einheit sind (ibid., S. 102–104). Dennoch steht die Idee, dass ein umfassendes Begriffssystem erst durch ein solches Kategoriensystem und nicht schon durch die deduktive Logik zu einer Einheit wird, im Widerspruch zu Frege und Russells universalistischer Konzeption, während sie im Einklang steht mit derjenigen Position, die von solchen Neukantianern wie Cassirer und Natorp vertreten wurde.[147]

Da die Forderung nach einer Einbettung der Mathematik in die empirischen

[147] Natorp bemerkte zum Beispiel: „Insbesondere ist die Einheit der Wissenschaften zu begründen in der Einheit ihres logischen Fundamentes, d.h. nicht bloß im Gebrauch derselben Denkverfahren, sondern darin, daß der Grundplan, nach welchem ihr gemeinsamer Gegenstand sich aufbaut, in der von der Logik darzulegenden Grundgesetzlichkeit der Gegenstandserkenntnis überhaupt vorgezeichnet ist“ (Natorp, 1910, S. 9). Dieselbe Idee wurde auch von Cassirer vertreten. Vergleiche zum Beispiel (Cassirer, 1907, S. 45).

Wissenschaften eine offenkundige Konsequenz von Carnaps Versuch ist, ein einheitliches und umfassendes Begriffssystem im Rahmen eines Kategoriensystems zu begründen – einem neukantianischem Projekt –, ist also nicht nur die Behauptung zu verwerfen, dass diese Forderung eine genuin logizistische ist. Es ist sogar die Behauptung zu verwerfen, dass Carnaps Betonung dieser Forderung allein schon bezeugt, dass sich in seinem Gesamtwerk eine Idee findet, die ausgehend von seiner Verwurzelung in der logizistischen Tradition zu verstehen ist.

Weshalb aber unternahm Carnap dann in der *Logischen Syntax* den Versuch, sich mit seiner Betonung der Forderung nach einer Erklärung der Anwendbarkeit in die von Frege und Russell begründete logizistische Tradition einzuordnen? Zunächst einmal kann gegen meine Kritik an Carnaps Behauptung, dass sich der Logizismus mittels (P) charakterisieren lässt, eingewendet werden, dass Carnap den Logizismus mit Hilfe von (P) in erster Linie von den beiden anderen um 1930 populären Zugänge zu den Grundlagen der Mathematik abgrenzen wollte: Er war davon überzeugt, dass der Formalismus die Forderung (P) ignoriert (Carnap, 1930c, S. 309; 1934a, S. 254) und er glaubte daher, (P) verwenden zu können, um den Logizismus von Formalismus abzugrenzen. Da die Intuitionisten die klassische Mathematik verwarfen, erlaubt es (P) zusätzlich, den logizistischen Zugang vom Intuitionismus abzugrenzen.

Meines Erachtens gibt es jedoch einen wichtigeren Grund dafür, weshalb Carnap glaubte, sich mit seiner Betonung der Forderung (P) in die Tradition des Frege-Russellschen Logizismus einordnen zu können. Die Forderung nach einer Erklärung der Rolle der Mathematik in den empirischen Wissenschaften kann ein Bestandteil unterschiedlichster philosophischer Programme sein. Insbesondere kann sie ein Bestandteil eines neukantianischen Programms sein, das die Möglichkeit objektiven Wissens durch die objektivierende Funktion mathematischer Strukturen erklären will. Sie kann aber auch Bestandteil eines logizistischen Programms sein, das durch den Aufbau der Mathematik in Rahmen eines allumfassenden logischen Systems aufzeigen will, wie die mathematischen Zeichen verwendet werden können, um empirische Aussagen zu machen. Und obwohl Carnap in seinen frühsten philosophischen Versuchen, die Forderung nach einer Erklärung der Anwendbarkeit in Übereinstimmung mit Cassirer in ein transzendentalphilosophisches Projekt einbettete, distanzierte er sich bereits in der ersten Hälfte der 1920er Jahren von einem solchen Projekt, und bettete diese Forderung in eine universalistische Logikkonzeption ein (Carus, 2007, S. 142). Damit begann er zu behaupten, dass die Rolle der Logik und der Mathematik in den empirischen Wissenschaften erklärt werden kann, indem ein solches formales und präzise spezifiziertes Sprachsystem aufgebaut wird, wie es von Frege in den

Grundgesetzen oder von Russell und Whitehead in den *Principia Mathematica* errichtet wurde.[148]

Meines Erachtens waren es also diese Logizisten, die Carnap zu einer für seine gesamte Philosophie entscheidenden Einsicht brachten: zu der Einsicht, dass das Problem der Anwendbarkeit zu lösen ist, indem mittels der Konstruktion einer formalen Sprache im Detail und in vollständig präziser Weise aufgezeigt wird, welcher Zusammenhang zwischen der Logik und der Mathematik einerseits und der empirischen Wissenschaft andererseits besteht. Zwar hatte Carnap in der *Logischen Syntax* die Idee aufgegeben, dass dieser Zusammenhang mittels des Aufbaus eines logizistischen Sprachsystems zu erklären ist. Die grundsätzliche Idee, dass dieser Zusammenhang durch die präzise Konstruktion eines umfassenden Sprachsystems zu klären ist, findet sich aber auch noch in diesem Werk und bildet ein Kernelement der Konzeption der *Logischen Syntax*.

Doch da diese Idee ein zentrales Element der gesamten Konzeption der *Logischen Syntax* ist, ist es im Rahmen dieser Konzeption nicht mehr länger möglich, diese Einsicht in einer Weise zu formulieren, die es erlauben würde, die logizistische Version der Forderung nach einer Erklärung der Anwendbarkeit von einer neukantianischen Version abzugrenzen: Gemäss der *Logischen Syntax* bleibt von der Philosophie einzig das Projekt einer Untersuchung der Vorteile und Nachteile syntaktisch spezifizierter Sprachformen und daher reduziert sich auch die neukantianische Forderung nach einer transzendentalen Erklärung des Zusammenhanges von Objektivität und Mathematik auf die Forderung (P).

Wenn die eben gegebene Darstellung korrekt ist, so ist also eine entscheidende Einsicht, die Carnap Frege und Russell verdankte – die Idee, dass eine Erklärung des Zusammenhanges von Mathematik und empirischer Wissenschaft durch den Aufbau eines umfassenden und formalen Sprachsystems zu liefern ist – ein zentrales Element der Konzeption der *Logischen Syntax*. Daher erstaunt es auch nicht, dass Carnap auch noch 1934 einen zum Scheitern verurteilten Versuch unternahm, diese Idee zu verwenden, um den Logizismus als eine philosophisch signifikante Position zu definieren.

[148] Es ist zu vermuten, dass sich Carnap zwischen 1922 und 1924 im Rahmen eines langwierigen und komplexen Prozesses mehr und mehr von seinem frühen transzendentalphilosophischen Programm distanzierte. Dieser Prozess wird detailliert diskutiert in (Carus, 2007, Kap. 5–6).

6 Logizismus, Metamathematik und Wittgensteins *Tractatus*

Ich habe in den vorhergehenden Kapiteln im Detail diskutiert, welche Einflüsse, welche Schwierigkeiten und welche Einsichten Carnap schliesslich dazu brachten, 1934 in seiner *Logischen Syntax der Sprache* eine Position zu vertreten, die darauf abzielte, die Diskussion über die Grundlagen der Logik und der Mathematik in eine Untersuchung der Vorzüge und Nachteile syntaktisch spezifizierter Kalküle zu transformieren. Ich habe die These vertreten, dass Carnap immer das Problem, welche Rolle die Logik und die Mathematik in den empirischen Wissenschaften spielen, als das zentrale Problem in dieser Grundlagendiskussion erachtete. Ein Zugang, der auf dieser These aufbaut, hat sich insbesondere aus den folgenden zwei Gründen als erhellend erwiesen: Erstens erlaubt er es, hinter allen Brüchen und Neuansätzen, die die intellektuelle Entwicklung bis hin zur *Logischen Syntax* prägten, eine wichtige Kontinuität auszumachen. Dieser Zugang erlaubt es sogar zu behaupten, dass diese Brüche daraus resultierten, dass Carnap im Rahmen verschiedener Ansätze und ausgehend von unterschiedlichen Voraussetzungen versuchte, das für ihn zentrale Problem zu lösen. Zweitens erlaubt es dieser Zugang zu verstehen, weshalb Carnap in seiner *Logischen Syntax* einen zum Scheitern verurteilten Versuch unternahm, sich in die von Frege und Russell begründete logizistische Tradition einzuordnen.[149]

In diesem abschliessenden Kapitel soll eine Übersicht gegeben werden über die wichtigsten Schritte in der Entwicklung von Carnaps Philosophie der Logik und der Mathematik bis hin zu seiner *Logischen Syntax*. Dabei soll insbesondere aufgezeigt werden, welche Rolle der Frege-Russellsche Logizismus, die von Gödel und Tarski verfolgten metamathematischen Programme und Wittgensteins *Tractatus* in dieser Entwicklung genau spielten.

Es ist meines Erachtens keine entscheidende Frage, unter welchem Einfluss Carnap dazu gelangte, das Problem der Anwendbarkeit der Mathematik in den empirischen Wissenschaften als ein Grundproblem der Philosophie einzustufen. Um seine intellektuelle Entwicklung zu verstehen, genügt es zu sehen, dass er zu Beginn seiner philosophischen Karriere in den frühen 1920er Jahren versuchte, dieses Problem mittels Programmen zu lösen, die tief im Neukantianismus verwurzelt waren: Am Anfang seiner Karriere stand das Projekt, ein

[149] Dass dieser Zugang entscheidend ist, wenn Carnaps Beziehung zur logizistischen Tradition verstanden werden soll, zeigt sich deutlich an Ricketts Aufsatz *Frege, Carnap, and Quine: Continuities and Discontinuities*. Ricketts wählt diesen Zugang nicht und ist in der Folge lediglich in der Lage, neben oberflächlichen Ähnlichkeiten eine einzige echte Kontinuität zwischen Frege und dem Carnap der *Logischen Syntax* auszumachen. Diese soll darin bestehen, dass Frege und Carnap es beide vermieden haben, eine ontologische Fundierung der Logik zu geben (Ricketts, 2004, S. 188–189). Ich bestreite nicht, dass es sich hierbei um eine Kontinuität zwischen Frege und Carnap handelt. Dennoch erlaubt sie allein es offenkundig nicht zu verstehen, weshalb Carnap versuchte, sich auch noch in seiner *Logischen Syntax* in die logizistische Tradition einzuordnen.

Kategoriensystem im Rahmen einer transzendentalen Logik zu begründen, um so ein einheitliches Wissenssystem zu errichten, das die formalen und die empirischen Wissenschaften vereint. Und auf dieses Projekt folgte das Programm, die konventionellen Voraussetzungen zu bestimmen, die es überhaupt erst ermöglichen, mathematische Begriffe und Strukturen zu verwenden, um die Wirklichkeit zu beschreiben.

Zwar war Carnap schon in den frühen 1920er Jahren an der von Frege und Russell entwickelten modernen Logik interessiert.[150] Ausserdem fand er es bemerkenswert, dass sich die Mathematik auf die Logik zurückführen lässt. Doch ein solches Interesse an der modernen Logik ist für einen Neukantianer keine Ungeheuerlichkeit. So betonte etwa auch Cassirer, dass Russell mit seiner Relationstheorie einen entscheidenden Fortschritt in der Logik gemacht hatte. Cassirer galt die Syllogistik als „das eigentlich hemmende und reaktionäre Moment“ (Cassirer, 1907, S. 7) und er behauptete daher, „daß sie [die Logistik] die ‚formale Logik‘ erneuert und sie wiederum mit dem Lebenssaft der Wissenschaft erfüllt hat“ (ibid., S. 8). Zudem betonte er, dass auch die Kantische Lehre „eine rein logische Ableitung der mathematischen Grundprinzipien“ fordert (ibid., S. 31–32).[151]

In Laufe der ersten Hälfte der 1920er Jahren distanzierte sich Carnap unter dem Einfluss von Frege und Russell in zwei Hinsichten von seinem frühen neukantianischen Zugang. Erstens gab er das Projekt auf, das Kategoriensystem, das die Einheit der Wissenschaft begründen soll, mittels einer transzendentalen Logik bestimmen zu wollen, und er gelangte zu der Überzeugung, dass die deduktive oder formale Logik selbst dieses einheitsstiftende Kategoriensystem liefert (Carus, 2007, S. 142). Er erkannte also in einer typentheoretischen Hierarchie von Aussagefunktionen die grundlegendste Struktur einer jeden idealen Wissenschaftssprache und übernahm damit wesentliche Elemente der von Frege und Russell artikulierten universalistischen Konzeption von Logik und Sprache.[152] Zweitens gelangte er

---

[150] Allerdings bediente sich Carnap in keiner seiner frühen neukantianischen Schriften der Sprache der formalen Logik. Die erste Arbeit, in der diese Sprache tatsächlich eine Rolle spielte, ist der *Logische Aufbau*.

[151] Ich behaupte selbstverständlich nicht, dass Cassirer ein mit dem von Frege und Russell verfolgten logizistischen Grundlegungsprojekt vergleichbares Projekt in der Philosophie der Mathematik verfolgte. Ich behaupte lediglich, dass ein Interesse an der modernen Logik und an einem Aufbau der Mathematik im Rahmen der Relationstheorie Carnap nicht von allen übrigen Neukantianern unterscheidet.

[152] Es kann dafür argumentiert werden, dass die formale Logik im *Aufbau* dieselbe Rolle spielte wie die transzendentale Logik im Werk von Cassirer oder von Kant. Die formale Logik sollte ja im *Aufbau* eine Antwort auf die Frage geben, wie objektive Erkenntnis überhaupt möglich ist (Sauer, 1989, S. 116). Es kann sich daher die Vermutung aufdrängen, dass der von Carnap unter dem Einfluss von Frege und Russell gemachte Schritt weg von seinem frühen tranzendentalphilosophischen Programm kein sonderlich wichtiger Einschnitt in seiner Entwicklung darstellt. Da ich in dieser Untersuchung den *Aufbau* nicht diskutiert habe, kann ich hier nicht versuchen, die Frage zu entscheiden, ob diese Vermutung korrekt ist. Es ist meines Erachtens allerdings klar, dass dieser Schritt in einer Hinsicht tatsächlich einen signifikanten Einschnitt darstellte. Im Rahmen seines frühen tranzendentalphilosophischen Programms machte Carnap geltend, dass die formale Logik selbst Voraussetzungen macht, die im Rahmen einer transzendentalen Logik zu analysieren sind (Carus, 2007, S. 97–105). Damit setzte er voraus, dass ein Standpunkt ausserhalb der Sprache der einfachen Typentheorie möglich ist und es eine Disziplin gibt, die fundamentaler ist als die formale Logik. Im *Aufbau* hatte Carnap diese Idee

unter dem Einfluss dieser Logizisten zu der Überzeugung, dass eine Erklärung des Zusammenhanges von Mathematik und empirischer Wissenschaft durch den Aufbau eines formallogischen Sprachsystems zu leisten ist, in dem die formalen und die empirischen Wissenschaften formalisiert werden und in einen systematischen Zusammenhang gebracht werden.

Selbstverständlich lieferten Frege und Russell mit ihrer neuen Logik auch das Werkzeug, das Carnap benötigte, um zum Beispiel das technische Programm des *Logischen Aufbaus* überhaupt angehen zu können. Meines Erachten erlaubt es aber die Tatsache, dass Carnap zu den beiden eben angeführten Überzeugungen gelangte, zu behaupten, dass seine Philosophie der Logik und der Mathematik auch in weiteren Hinsichten entscheidend vom Frege-Russellschen Logizismus geprägt war: Die erste dieser Überzeugungen prägte Carnaps Philosophie insbesondere in den 1920er Jahren, die zweite Überzeugung war sogar noch ein zentraler Bestandteil der Konzeption der *Logischen Syntax*. Ich behaupte nicht, dass sich Carnap schon in den frühen 1920er Jahren unter dem Einfluss von Frege und Russell vollständig vom Neukantianismus distanzierte. Im Zentrum des *Logischen Aufbaus*, den er 1925 im Wesentlichen fertig gestellt hatte, stand ja noch immer das Problem einer Erklärung der Möglichkeit objektiven Wissens. Doch im Unterschied zu seinen früheren Projekten sollte im *Aufbau* eine solche Erklärung nicht mehr durch den Nachweis der objektivierenden Funktion der Mathematik erreicht werden, sondern durch eine Formalisierung aller wissenschaftlichen Sätze im Rahmen der einen universellen Sprache der einfachen Typentheorie.

Die intensive Lektüre von Wittgensteins *Tractatus* brachte Carnap um 1926 dazu, einen Schritt über seine frühere Konzeption von Logik und Mathematik hinaus zu machen. Unter dem Einfluss des *Tractatus* wandte er sich einer instrumentalistischen Konzeption zu und begann zu behaupten, dass die Rolle der Logik und der Mathematik in den empirischen Wissenschaften nur diejenige eines Instruments zur Transformation von Sätzen ist. Wird eine solch instrumentalistische Konzeption mit dem logizistischen Projekt eines einheitlichen und umfassenden formalen Sprachsystems kombiniert, so resultiert das folgende Programm: Die Anwendbarkeit der Mathematik in der Naturwissenschaft ist dadurch zu erklären, dass erstens ausgehend von den *Principia Mathematica* ein formales Sprachsystem aufgebaut wird und dass zweitens in diesem System die Sätze der Mathematik als tautologische Hilfsmittel der Transformation von empirischen Sätzen erwiesen werden.

verworfen und also ein wichtiges Element der von Frege und Russell verteidigten universalistischen Konzeption übernommen.

Im Rahmen dieses Programms, das Carnap vor allem im Jahr 1930 zu realisieren versuchte, kam auch der logizistischen Kernthese der Rückführbarkeit der Mathematik auf die Logik eine wichtige Rolle zu: Lassen sich alle mathematischen Sätze als logische Sätze erweisen, so ist gezeigt, dass auch diese Sätze einzig Transformationsregeln eines inferentiellen Systems artikulieren und also blosse Hilfsmittel der tautologischen Transformation sind. Zudem war Carnap 1930 davon überzeugt, dass es ein logizistischer Aufbau der Mathematik erlaubt, präzise und im Detail zu zeigen, wie in Einzelfällen arithmetische Gleichungen zur Transformation von Wirklichkeitssätzen verwendet werden können.

Da Carnaps Philosophie der Logik und der Mathematik bereits 1930 vom *Tractatus* beeinflusst war, stellt sich die Frage, wie das Verhältnis seiner Philosophie zu Wittgensteins Werk vor dem im Januar 1931 gemachten Schritt zu einem metalogischen Programm genau zu beurteilen ist. Wie in Kapitel 3.5 diskutiert, behaupten Awodey und Carus, dass sich dieses Verhältnis dahingehend bestimmen lässt, dass Carnap in einem „Wittgensteinschen Gefängnis" eingesperrt war. Sie stützen ihre Behauptung auf die folgenden zwei Thesen: 1.) Vor dem Schritt zu seinem metalogischen Programm akzeptierte Carnap in Anlehnung an den *Tractatus* eine Sprachauffassung, der gemäss jeder Satz eine Wahrheitsfunktion von endlich vielen Elementarsätzen ist. Jedoch war er sich sehr wohl der Tatsache bewusst, dass sich im Rahmen einer solch finitistischen Sprache grosse Teile der empirischen Wissenschaften und der klassischen Mathematik nicht formulieren lassen. 2.) Carnap wusste, dass er, um sein philosophisches Programm realisieren zu können, irgendeine Art von Metaperspektive benötigte. Doch seine Wittgensteinsche Sprachauffassung schloss jede Metaperspektive prinzipiell aus (Awodey & Carus, 2007, S. 26–28).

Was also ist von dieser Einschätzung zu halten? Meines Erachtens ist sie in einigen Hinsichten durchaus korrekt, in anderen Hinsichten ergänzungsbedürftig, in wieder anderen falsch. So ist denn auch die erste These teilweise korrekt: Zwar akzeptierte Carnap vor dem Schritt zu seinem metalogischen Programm keine Wittgensteinsche Sprachauffassung. Vielmehr war seine Sprachauffassung in den 1920er Jahren von der Idee geprägt, dass die einfache Typentheorie die jeder idealen Wissenschaftssprache zugrundeliegende logische Struktur darstellt. Auch 1930 bediente er sich in seinem Versuch, die Mathematik auf die Logik zurückzuführen, einer typentheoretischen Sprache, die es gestattete, über unendliche Bereiche von Gegenständen und Aussagefunktionen zu quantifizieren. Dennoch definierte er 1930 den Begriff der Tautologie in Anlehnung an den *Tractatus* so, dass er einzig für eine solche Sprache eine adäquate Fassung des Begriffs der logischen Wahrheit liefert, in der alle Sätze Wahrheitsfunktionen von endlich vielen Elementarsätzen sind.

In Carnaps Konzeption von 1930 bestand also tatsächlich eine Spannung zwischen Elementen, die er aus Wittgensteins *Tractatus* übernommen hatte, und seiner Überzeugung, dass die logisch-mathematischen Ressourcen der klassischen Mathematik in den empirischen Wissenschaften unverzichtbar sind. Jedoch resultierte diese Spannung nicht aus einer Wittgensteinschen Sprachkonzeption, sondern daraus, dass Carnap zu dieser Zeit keinen Weg sah, wie er die folgenden beiden Behauptungen gleichzeitig verteidigen konnte: 1.) Alle logischen Wahrheiten sind Tautologien. 2.) Die in einem logizistischen Aufbau der Mathematik benötigten Prinzipien sind logische Wahrheiten.

Auch die zweite These, die Awodey und Carus vertreten, ist nicht vollständig verfehlt. Carnap war zweifelsohne davon überzeugt, dass die von Wittgenstein im *Tractatus* entwickelte Konzeption eine Metaperspektive ausschliesst. Es ist daher richtig, dass dieses Element des *Tractatus* für Carnap zu einem grundsätzlichen Problem wurde, nachdem er zu der Überzeugung gelangt war, dass er eine Metaperspektive als zulässig erweisen musste. Allerdings suggeriert die Darstellung von Awodey und Carus, dass Wittgensteins Verbot von metatheoretischen Sätze von vornherein ein grundsätzliches Problem für Carnaps Konzeption darstellte, und dem war nicht so. Erst im Februar 1930 gelangte er unter dem Einfluss von Tarski zu der Einsicht, dass er tatsächlich, um sein philosophisches Projekt verwirklichen zu können, irgendeine Art von metatheoretischem Standpunkt akzeptieren musste. Erst jetzt realisierte er, dass er eine Metalogik – eine Theorie der Logik – brauchte, deren Gegenstand die logischen Eigenschaften von Sätzen und die logischen Beziehungen zwischen Sätze sind.

Es ist zu beachten, dass hier mehr auf dem Spiel steht als ein reines Datierungsproblem: Meines Erachtens war Carnap vor seinen Gesprächen mit Tarski im Februar 1930 davon überzeugt, dass er keine genuine Metaperspektive benötigte. Seine Auffassung von Logik, von Sprache und von Mathematik war tief in der von Frege und Russell entwickelten universalistischen Konzeption verwurzelt und er war daher der Ansicht, dass weder in der Philosophie, noch in der Logik, noch in der sogenannten Metamathematik ein metatheoretischer Standpunkt notwendig ist. Dass Carnap im Februar 1930 zu der Überzeugung gelangte, dass er tatsächlich, um sein Projekt verwirklichen zu können, irgendeine Art von metatheoretischem Standpunkt akzeptieren musste, stellt daher einen signifikanten Einschnitt in seiner philosophischen Entwicklung dar. Und da es Tarski war, der ihn dazu brachte, sich zumindest in ersten Ansätzen von seiner früheren universalistischen Konzeption zu distanzieren, hatte dieser Logiker also einen entscheidenden Einfluss auf die

Entwicklung, die Carnap zur *Logischen Syntax* führte.[153] Insbesondere ist es dem Einfluss Tarskis zuzuschreiben, dass Wittgensteins Konzeption, die eine Metaperspektive auszuschliessen scheint, für Carnap zu einem grundsätzlichen Problem wurde.

Wie also glaubte Carnap in den 1920er Jahren, auf die Annahme einer Metaperspektive verzichten zu können? Dem Wiener Kreis galt die Philosophie nicht als eine Lehre, die philosophische Sätze aufstellt: „Es werden nicht eigene ‚philosophische Sätze' aufgestellt, sondern nur Sätze geklärt, und zwar Sätze der empirischen Wissenschaften" (Carnap et al., 1979, S. 99). Die Philosophie ist daher wesentlich eine Tätigkeit, und zwar diejenige, mittels der Methode der logischen Analyse Sätze zu klären. Und, wie auch schon von Wittgenstein behauptet, führt diese Methode nicht zu philosophischen Sätzen: „Das Resultat der Philosophie sind nicht ‚philosophische Sätze', sondern das Klarwerden von Sätzen" (4.112). Gemäss dieser Konzeption beschäftigt sich also zwar die Philosophie mit den Sätzen der empirischen Wissenschaften und daher nimmt der Philosoph in gewissem Sinne ein Standpunkt ausserhalb der empirischen Wissenschaften ein. Da der Philosoph jedoch keine eigenen Sätze formuliert, sondern eine kritische Tätigkeit ausübt, bedarf er dennoch keines Standpunktes, von dem aus er metatheoretische Aussagen über die Sätze der empirischen Wissenschaften zu formulieren hätte.

Auch Carnaps Konzeption der Logik war vor dem Schritt zu einem metalogischen Programm von demselben Gedanken geprägt. Auch diese Konzeption basierte auf der Idee, dass im Zentrum der Logik eine Tätigkeit steht. In seinem *Abriss der Logistik* bemerkte er:

> Zu den formalen Grundsätzen kommen noch *zwei materiale Grundsätze*, die nicht symbolisch ausdrückbar sind, sondern inhaltlich verstanden werden müssen, weil sie Anleitungen zum Handeln geben, nämlich zum Neuaufstellen von Behauptungen auf Grund schon vorliegender Behauptungen. (Carnap, 1929, S. 10)

Nun könnte man behaupten, dass Carnap mit dieser Bemerkung lediglich darauf hinweisen wollte, dass sich die Schlussregeln nicht in der symbolischen Sprache der formalen Logik selbst ausdrücken lassen, sondern im Rahmen einer metalogischen Theorie aufgestellt werden müssen. Allerdings ist Behauptung nicht sonderlich plausibel. Sie vermag nämlich nicht zu erklären, weshalb Carnap zu dieser Zeit betonte, dass „Deduzieren ... Handeln" ist (Carnap, 2000, S, 60). Meines Erachtens machte Carnap diese Bemerkung denn auch aus dem folgenden Grund: Ihm galten die Regeln, denen gemäss Behauptungen in andere

[153] Tarski beeinflusste Carnap noch ein zweites Mal in entscheidender Weise. Dass Carnap 1935 mit seiner syntaktischen Sprachauffassung brach und sich seinem semantischen Programm zuwandte, ist auch dem Einfluss dieses Logikers zuzuschreiben (Ricketts, 1996b).

Behauptungen transformiert werden können, als Handlungsanweisungen. Diese Handlungsanweisungen sind grundsätzlich nicht in der einen Sprache der *Principia Mathematica* ausdrückbar, doch nicht aus dem Grund, weil sie im Rahmen einer Metatheorie zu beschreiben sind. Vielmehr dienen die Formulierungen, in denen Schlussregeln zum Ausdruck gebracht werden, nicht dazu, theoretische Aussagen zu machen, sondern dazu, praktische Regeln auszudrücken. Und daher kann es keine metalogische Theorie geben, in deren Zentrum der Begriff der Beweisbarkeit oder der Begriff der Ableitbarkeit steht.[154]

Auch Carnaps Projekt einer allgemeinen Axiomatik war ein Versuch zu zeigen, dass in der sogenannten Metamathematik kein genuin metatheoretischer Standpunkt notwendig ist. Jedoch schlug er dabei nicht diejenige Strategie ein, der er sich im Zusammenhang mit der Logik bediente. Vielmehr versuchte er zu zeigen, dass die von Hilbert und seinen Schülern durchgeführten Untersuchungen axiomatischer Systeme ebenfalls in der einen Sprache der *Principia* formuliert werden können. In Übereinstimmung mit Frege und Russell behauptete er also, dass es ein korrektes logisches System gibt, das allumfassend ist und in dem daher auch die sogenannten metamathematischen Begriffe zu definieren sind.

Die Einsicht, dass eine Metaperspektive in irgendeiner Form notwendig ist, stellte daher Carnaps frühere universalistische Konzeption von Logik und Sprache in Frage. Als er dann Ende 1930 auch noch von Gödels Unvollständigkeitsbeweis erfuhr, sah er sich endgültig gezwungen, einen neuen Ansatz zu entwickeln. Dieser Beweis widerlegte seinen Versuch, eine logizistische Theorie der mathematischen Wahrheit zu begründen, und damit seinen Versuch, das Problem der Anwendbarkeit der Mathematik zu lösen. In der Folge distanzierte sich Carnap von wichtigen Elementen des Frege-Russellschen Logizismus. Insbesondere verwarf er das Projekt vollständig, die Mathematik auf die reine Logik zurückzuführen. Doch der Bruch, zu dem er durch Gödels Beweis geführt wurde, war weitaus radikaler: Er verwarf erstens die Idee, dass die einfache Typentheorie die logische Struktur einer jeden Wissenschaftssprache darstellt, distanzierte sich also von der logizistischen Sprachform der *Principia* und wandte sich dem Projekt zu, die kanonische Struktur der idealen Wissenschaftssprache in Anlehnung an den *Tractatus* neu zu bestimmen. Zweitens gab er die Überzeugung auf, dass eine Definition des Begriffs der mathematischen Wahrheit notwendig

---

[154] Allerdings benötigte Carnap in seinem Versuch, eine logizistische Theorie der mathematischen Wahrheit zu begründen, einen metalogischen Begriff der Beweisbarkeit. Denn er wollte ja die mathematischen Wahrheiten mit den Sätzen gleichsetzen, die sich aus den logischen Grundätzen mittels logischer Deduktion beweisen lassen. Die von ihm im *Abriss* vertetene Konzeption der Logik konnte daher keine Basis liefern für sein logizistisches Programm von 1930. Es ist jedoch zu vermuten, dass sich Carnap vor den Diskussionen mit Tarski im Februar 1930 nicht bewusst war, dass er in seinem logizistischen Projekt irgendeine Art von metalogischer Theorie benötigte. So bemerkte er etwa noch in seinem Aufsatz *Die Mathematik als Zweig der Logik*, dass „inhaltliche (nicht in Zeichen zu gebende) Regeln für das praktische Handhaben der Formeln“ notwendig sind (Carnap, 1930c, S. 301).

ist, um die Mathematik als ein reines Hilfsmittel für die empirischen Wissenschaften zu erweisen. Stattdessen wandte er sich der Idee zu, dass die Mathematik unter Verzicht auf Existenzaxiome als einen Kalkül von Quasiformeln zu konstruieren ist.

Im Januar 1931 gelang es Carnap mit seinem *Versuch einer Metalogik*, diese neuen Ansätze in einem Projekt zu vereinen. Der Grundgedanke war bestechend einfach. Er bestand darin, eine wahrheitsfunktionale Sprache zu konstruieren und unter Voraussetzung einer Unterscheidung von Logik und Metalogik aus den Erläuterungen des *Tractatus* eine präzise metalogische Theorie für diese wahrheitsfunktionale Sprache zu extrahieren. Da er in diesem Manuskript eine wahrheitsfunktionale Sprachkonzeption entwickelte, sah er sich auch nicht mehr länger mit dem Problem konfrontiert, eine ontologisch voraussetzungsreiche typentheoretische Struktur als tautologisch erweisen zu müssen. Vielmehr konnte er geltend machen, dass der von ihm 1930 eingeführte Begriff der Tautologie im Wesentlichen eine umfassende Klärung der Natur der logischen Wahrheit liefert. Zudem erlaubte es ihm seine Unterscheidung von Logik und Metalogik, die Arithmetik metalogisch als eine kombinatorische Theorie von Zeichenreihen zu reinterpretieren und so zu legitimieren. Eine umfassende Lösung aller Probleme, mit denen seine Philosophie der Logik, der Mathematik und der Sprache Ende 1930 konfrontiert war, schien in greifbarer Nähe. Kein Wunder denn, dass er später in seiner Autobiographie den *Versuch einer Metalogik* als einen entscheidenden Durchbruch bezeichnete (Carnap, 1963a, S. 53).

Allerdings sah sich Carnap noch immer mit einem Problem konfrontiert, und zwar mit einem gravierenden. Im *Versuch* hatte er unhinterfragt vorausgesetzt, dass zwischen Logik und Metalogik unterschieden werden kann, und mit dieser Voraussetzung hatte er allem Anschein nach gegen Wittgensteins Verbot von Sätzen über Sätze verstossen. Daher sah er sich vor die Aufgabe gestellt, die Zulässigkeit einer metalogischen Perspektive nachzuweisen. Carnap löste dieses Problem in zwei Schritten: Zuerst unterwarf er das in der Metalogik zulässige Vokabular der Restriktion, dass einzig solche Terme zulässig sind, die mit ausschliesslicher Bezugnahme auf syntaktische Eigenschaften von Zeichenreihen definiert sind. In einem zweiten Schritt kombinierte er diesen Zugang mit der Idee, dass die primitiven Begriffe der Metalogik ein Mittel sind, um physikalische Schriftgebilde auf Grund ihrer Gestalt zu unterscheiden.[155]

Diese physikalistische Konzeption von Metalogik präsentierte Carnap im Sommer 1931 in seinen Referaten über Metalogik dem Wiener Kreis. Ich habe weiter oben dafür argumentiert,

[155] Meines Erachtens stand somit die Auseinandersetzung mit Wittgensteins *Tractatus* im Zentrum von Carnaps frühen metalogischen Projekten. Nicht nur bestimmte er im *Versuch* die Struktur einer idealen Sprache neu unter Verwendung Wittgensteinscher Ideen. Das Wittgensteinsche Verbot von Sätzen über Sätze brachte ihn auch dazu, einen syntaktischen Zugang zur Logik und eine physikalistische Konzeption von Metalogik zu entwickeln.

dass die Einsicht in die Notwendigkeit einer Metaperspektive einen signifikanten Einschnitt in Carnaps philosophischer Entwicklung darstellt. Doch die von ihm in seinen Referaten entwickelte Konzeption zeigt, dass er sich mit dem Schritt zu seinem metalogischen Programm nicht von allen Elementen seiner früheren universalistischen Konzeption distanzierte. Er akzeptierte zwar nun die Möglichkeit einer Theorie, die solche Begriffe wie Beweisbarkeit und Ableitbarkeit zu ihrem Gegenstand hat. Doch die universalistische Idee, dass es keinen Standpunkt ausserhalb des kanonischen logischen Sprachsystems gegeben kann, hatte er noch nicht verworfen. Der von ihm in den Referaten als legitim erwiesene metalogische Standpunkt sollte kein solch externer Standpunkt sein. Vielmehr entwickelte er seine physikalistische Konzeption gerade deshalb, um zeigen zu können, dass ein metalogischer Standpunkt bereits im Rahmen des kanonischen Sprachsystems der Modellsprache möglich ist: Mit dieser Konzeption wollte er zeigen, dass in der Metalogik nur auf physikalische Inskriptionen Bezug genommen wird und dass also die Metalogik in der Modellsprache formuliert werden kann.

Es ist zu vermuten, dass Carnap glaubte, mit der Theorie, die er in den Referaten präsentierte, die Probleme, die seine Position von 1930 zum Einsturz gebracht hatte, im Grossen und Ganzen gelöst zu haben. So glaubte er ja, die Grundzüge der kanonischen Sprachform mit seiner Modellsprache neu bestimmt zu haben, die Arithmetik metalogisch als einen Kalkül von Quasiformeln begründet zu haben und den metalogischen Sätzen und Begriffen selbst eine präzise bestimmte Stellung innerhalb der kanonischen Sprachform gegeben zu haben.

Wäre Carnap bereit gewesen, eine intuitionistische Version der Analysis zu akzeptieren, so hätte es ihm vermutlich gelingen können, ausgehend von der Konzeption der Referate eine umfassende Lösung der für ihn zentralen philosophischen Probleme zu erreichen. Doch weil er stets das Problem der Anwendung der Mathematik in den empirischen Wissenschaften als das zentrale Problem erachtete und weil er davon überzeugt war, dass eine intuitionistische Theorie der Analysis den Ansprüchen der theoretischen Physik nicht gerecht werden kann, sah er sich bald schon gezwungen, die Position der Referate wieder aufzugeben: Gödel und Hahn überzeugten ihn im Juli 1931 davon, dass es nicht gelingen kann, eine Theorie der reellen Zahlen, die den Gesetzen der klassischen Mathematik genügt, im Rahmen der Modellsprache zu konstruieren.

Die Einführung der erweiterten Sprache, die die Konsequenz dieser Kritik von Gödel und Hahn war, führte wiederum zu einem signifikanten Bruch: Da Carnap nun erneut eine ontologisch voraussetzungsreiche Sprache der einfachen Typentheorie konstruierte, gab er die Idee auf, die Arithmetik als einen Hilfskalkül zu konstruieren, und kehrte zu einem Element seines logizistischen Programms von 1930 zurück: In seinem *Metalogik* Manuskript, an dem er im Herbst 1931 zu arbeiten begann, versuchte er wieder, ein vollständiges Kriterium für mathematische Wahrheit zu definieren. Die Tatsache, dass er dieses Projekt wieder aufnahm und sich wieder einer typentheoretischen Sprache zuwandte, könnte zu der Vermutung Anlass geben, dass er sich nun wieder einer Position zuwandte, die sich stärker an der von Frege und Russell entwickelten orientierte. Doch dies war nicht der Fall. Tatsächlich zwang ihn sein Projekt einer Definition der mathematischen Wahrheit dazu, sich weiter vom Frege-Russellschen Universalismus zu distanzieren: Unter dem Einfluss von Gödel erkannte er bald, dass eine metalogische Definition der mathematischen Wahrheit für seine Modellsprache nur in einer Sprache gegeben werden kann, die stärker ist als die Modellsprache. In seinem *Metalogik* Manuskript, an dem Carnap im Herbst 1931 zu arbeiten begann und in dem er eine solche metalogische Definition zu geben versuchte, war er daher gezwungen, die Möglichkeit einer genuinen Metaperspektive zu akzeptieren. Zwar galt ihm die Modellsprache in diesem Manuskript noch immer als die eigentliche Sprache. Da die in der metalogischen Beschreibung der Modellsprache benötigte metalogische Sprache stärker sein musste als die Modellsprache, konnte er jedoch nicht mehr länger behaupten, dass die Metalogik keinen Standpunkt ausserhalb dieser eigentlichen Sprache erzwingt.

Allerdings hielt Carnap im *Metalogik* Manuskript noch an einem Element der Konzeption von Metalogik fest, die er in den Referaten präsentiert hatte: Er war noch immer davon überzeugt, dass die Metalogik eine reine Theorie sprachlicher Formen ist, in der auf nichts anderes Bezug genommen werden muss als auf die in einer Sprache auftretenden Sequenzen sprachlicher Zeichen sind. Doch auch diese Idee war schon bald als verfehlt erwiesen: Im Herbst 1932 überzeugte ihn Gödel davon, dass eine solche Konzeption von Metalogik nicht zu vereinbaren ist mit dem Versuch, den Begriff der mathematischen Wahrheit metalogisch zu definieren. Und auf diese Kritik von Gödel reagierte Carnap erneut mit einem radikalen Bruch, dem Schritt zu einem Toleranzprinzip in der Logik.

Zwar war der Schritt zum Toleranzprinzip vermutlich durch ein technisches Problem motiviert: Carnap musste eine Metasprache, die Quantifikationen über beliebige Mengen gestattet, als eine rein syntaktische Sprache erweisen. Dennoch transformierte dieser Schritt sein gesamtes philosophisches Projekt noch einmal grundsätzlich. Mit dem Schritt verwarf er die Idee der einen korrekten Logik und distanzierte sich von den letzten Resten einer universalistischen Konzeption:[156] Mit dem Toleranzprinzip akzeptierte er die Idee, dass es eine Vielzahl logisch-mathematischer Systeme gibt, von denen keines einen grösseren

[156] Wie von Ricketts zu Recht betont, ist das Toleranzprinzip insbesondere auch inkompatibel mit der für Freges Konzeption zentralen Idee, dass die Logik eine regulative Rolle im Denken spielt (Ricketts, 2004, S. 190).

Anspruch auf Korrektheit besitzt als die anderen, und dass also einzig pragmatische Erwägungen den Ausschlag für die Wahl einer bestimmten Sprachform geben können. Daher versuchte Carnap in der *Logischen Syntax* denn auch zu zeigen, dass sich die gesamten Diskussionen über die Grundlagen der Logik und der Mathematik vollständig in die Untersuchung der Vorzüge und der Nachteile syntaktisch spezifizierter Kalkül transformieren lassen.

In der *Logischen Syntax* finden sich dennoch noch Spuren von Carnaps Projekt von 1932, den Begriff der mathematischen Wahrheit syntaktisch zu definieren. Auch in diesem Buch behauptete er noch, dass die logisch-mathematischen Sätze eines jeden Kalküls analytisch oder kontradiktorisch sind, und er vertrat also noch immer eine Version der logizistischen These, dass es zwischen logischer und mathematischer Wahrheit keine prinzipielle Differenz gibt. Dennoch ist dies ist nicht der hauptsächliche Grund dafür, dass Carnaps Konzeption von 1934 noch immer dem Frege-Russellschen Logizismus und Wittgensteins *Tractatus* verpflichtet war. [157]

Wie ich in dieser Untersuchung gezeigt habe, verdankte Carnap dem Frege-Russellschen Logizismus die für seine gesamte intellektuelle Entwicklung zentrale Einsicht, dass eine Erklärung der Anwendbarkeit der Mathematik durch den Aufbau einer formalen Sprache zu geschehen hat, die die empirischen und die formalen Wissenschaften vereint. Und die im Rahmen seiner gesamten intellektuellen Entwicklung wichtigste Einsicht, zu der er ausgehend von Wittgensteins *Tractatus* gelangte, war die, dass die Logik und die Mathematik reine Instrumente zur Transformation von empirischen Sätzen sind. Carnaps Position von 1934 ist denn auch in erster Linie deshalb noch dem Frege-Russellschen Logizismus und Wittgensteins *Tractatus* verpflichtet, weil sie noch immer auf diesen beiden Einsichten aufbaut: In der *Logischen Syntax* machte Carnap geltend, dass überhaupt jedes philosophische Problem durch den Aufbau eines formalen Sprachsystems zu lösen ist und also auch das Problem der Anwendbarkeit der Mathematik. Zudem machte er geltend, dass im Rahmen einer formalen Sprache die Logik und die Mathematik nur dasjenige explizit artikulieren, was in dem inferentiellen System, das die formale Sprache definiert, implizit enthalten ist. Nur wenn eine Sprache aufgebaut wird, die die formalen und die empirischen Wissenschaften

---

[157] Wie Friedman aufgezeigt hat, hat die Konzeption von Sprache, die Carnap in der *Logischen Syntax* entwickelte, kaum noch etwas mit derjenigen gemein, die Wittgenstein im *Tractatus* artikulierte: Gemäss der *Logischen Syntax* wird eine Sprache spezifiziert, indem ein System von Form- und Umformungsbestimmungen festgelegt wird. Ausgehend von diesen Bestimmungen wird dann für die Sprache eine syntaktische Unterscheidung zwischen den analytischen Sätzen und den synthetischen Sätzen der Sprache gezogen. Die Sprachkonzeption des *Tractatus* hingegen beruht auf einer philosophischen Theorie darüber, was einen Satz zu einem sinnvollen Satz macht. Ausgehend von dieser Theorie darüber, was ein Satz zu einem Abbild der Wirklichkeit macht, wird dann eine Unterscheidung zwischen den sinnvollen Sätzen und den Tautologien eingeführt (Friedman, 1997, S. 32–33).

vereint, lässt sich daher verstehen, weshalb die logisch-mathematischen Sätze überhaupt eine Funktion haben können. Denn erst im Rahmen einer solchen umfassenden Sprache kann gezeigt werden, dass die logisch-mathematischen Sätze es erlauben, Transformationen von empirischen Sätzen, die durch das inferentielle System der Sprache legitimiert sind, abzukürzen und zu vereinfachen.

Da Carnap also auch noch in der *Logischen Syntax* der logizistischen Tradition verpflichtet war, erstaunt es nicht, dass er sogar den Versuch unternahm, den Frege-Russellschen Logizismus syntaktisch zu charakterisieren. Doch die Auseinandersetzung mit dem *Tractatus* und die metamathematischen Resultate, mit denen ihn Gödel und Tarski konfrontiert hatten, hatten ihn letztlich dazu geführt, eine Konzeption zu entwickeln, die auf einer syntaktischen Auffassung von Logik und einer toleranten Einstellung gegenüber der Wahl von Sprachformen beruht. Und in Rahmen dieser Konzeption war er nicht mehr länger in der Lage, eine genuin logizistische Forderung zu formulieren, der noch so etwas wie philosophische Signifikanz zugeschrieben werden kann.

7 Bibliographie

Awodey, S. 2007. Carnap's Quest for Analyticity: the *Studies in Semantics*. In: Friedman & Creath (2007), S. 226–247.

Awodey, S. & Carus, A. W. 2001. Carnap, Completeness, and Categoricity: the *Gabelbarkeitssatz* of 1928. *Erkenntnis, 54*, 145–172.

Awodey, S. & Carus, A. W. 2004. How Carnap Could Have Replied to Gödel. In: Awodey & Klein (2004), S. 203–223.

Awodey, S. & Carus, A. W. 2007. Carnap's Dream: Gödel, Wittgenstein, and *Logical Syntax*. *Synthese, 159*, 23–45.

Awodey, S. & Carus, A. W. 2009. From Wittgenstein's Prison to the Boundless Ocean: Carnap's Dream of *Logical Syntax*. In: Wagner (2009), S. 79–108.

Awodey, S. & Klein, C. (Hg.) 2004. *Carnap Brought Home: the View from Jena*. Chicago: Open Court.

Awodey, S. & Reck, E. H. 2002. Completeness and Categoricity, Part I: Nineteenth-century Axiomatics to Twentieth-century Metalogic. *History and Philosophy of Logic, 23*, 1–30.

Buldt, B. 2004. On RC 102–43–14. In: Awodey & Klein (2004), S. 225–246.

Carnap, R. 1922a. *Der Raum: ein Beitrag zur Wissenschaftslehre*. Berlin: Reuther & Reichard.

Carnap, R. 1922b. Brief an Russell, 29. Juli 1922. Rudolf Carnap Papers, 1905-1970, ASP.1974.01, Special Collections Department, University of Pittsburgh, Katalognummer 102-68-31.

Carnap, R. 1923. Über die Aufgabe der Physik und die Anwendung des Grundsatzes der Einfachstheit. *Kant-Studien, 28*, 90–107.

Carnap, R. 1924. Dreidimensionalität des Raumes und Kausalität: eine Untersuchung über den logischen Zusammenhang zweier Fiktionen. *Kant-Studien, 30*, 331–345.

Carnap, R. 1926. *Physikalische Begriffsbildung*. Karlsruhe: Braun.

Carnap, R. 1927. Eigentliche und uneigentliche Begriffe. *Symposion: Philosophische Zeitschrift für Forschung und Aussprache, 1*, 355–374.

Carnap, R. 1928. *Der logische Aufbau der Welt*. Berlin: Weltkreis.

Carnap, R. 1929. *Abriss der Logistik, mit besonderer Berücksichtigung der Relationstheorie und ihrer Anwendung*. Wien: Springer.

Carnap, R. 1930a. Die alte und die neue Logik. *Erkenntnis, 1*, 12–26.

Carnap, R. 1930b. Besprechung von F. Kaufmann *Das Unendliche in der Mathematik und seine Ausschaltung*. *Deutsche Literaturzeitung, 51*, Sp. 1674–1678.

Carnap, R. 1930c. Die Mathematik als Zweig der Logik. *Blätter für deutsche Philosophie, 4*, 298–310.

Carnap, R. 1931a. Die logizistische Grundlegung der Mathematik. *Erkenntnis, 2*, 91–105.

Carnap, R. 1931b. *Versuch einer Metalogik*. Rudolf Carnap Papers (Collection 1029). Department of Special Collections, Charles E. Young Research Library, University of California, Los Angeles, Box 4, folder CM14, item 1.

Carnap, R. 1931c. *Einführung in die wissenschaftliche Philosophie*. Rudolf Carnap Papers (Collection 1029). Department of Special Collections, Charles E. Young Research Library, University of California, Los Angeles, Box 3, folder CM10, items 7–13.

Carnap, R. 1931d. Brief an von Neumann, 11. Juli 1931. Rudolf Carnap Papers, 1905-1970, ASP.1974.01, Special Collections Department, University of Pittsburgh, Katalognummer 029-08-02.

Carnap, R. 1932a. Die physikalische Sprache als Universalsprache der Wissenschaft. *Erkenntnis, 2*, 432–465.

Carnap, R. 1932b. Metalogik (Inhaltsverzeichnis). Rudolf Carnap Papers, 1905-1970, ASP.1974.01, Special Collections Department, University of Pittsburgh, Katalognummer 110-04-07.

Carnap, R. 1933. Brief an Neurath, 23. Dezember 1933. Rudolf Carnap Papers, 1905-1970, ASP.1974.01, Special Collections Department, University of Pittsburgh, Katalognummer 029-03-06.

Carnap, R. 1934a. *Logische Syntax der Sprache*. Wien: Springer. Übersetzt als Carnap (1937).

Carnap, R. 1934b. Die Antinomien und die Unvollständigkeit der Mathematik. *Monatshefte für Mathematik und Physik, 41*, 263–284.

Carnap, R. 1935a. Formalwissenschaft und Realwissenschaft. *Erkenntnis, 5*, 30–37.

Carnap, R. 1935b. Ein Gültigkeitskriterium für die Sätze der klassischen Mathematik. *Monatshefte für Mathematik und Physik, 42*, 163–190.

Carnap, R. 1937. *The Logical Syntax of Language* (übersetzt v. A. Smeaton). London: Kegan Paul.

Carnap, R. 1939. *Foundations of Logic and Mathematics*. Chicago: Chicago University Press.

Carnap, R. 1960. *Einführung in die symbolische Logik* (2. neubearbeitete u. erweiterte Aufl.). Wien: Springer.

Carnap, R. 1963a. Intellectual Autobiography. In: Schilpp (1963), S. 3–84.

Carnap, R. 1963b. W. V. Quine on Logical Truth. In: Schilpp (1963), S. 915–922.

Carnap, R. 2000. *Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik* (hg. v. T. Bonk & J. Mosterin). Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Carnap, R. et al. 1979. Wissenschaftliche Weltauffassung: der Wiener Kreis. In: R. Hegselmann (Hg.). *Otto Neurath: Wissenschaftliche Weltauffassung, Sozialismus und Logischer Empirismus*, S. 81–101. Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Carus, A. W. 2007. *Carnap and Twentieth-Century Thought: Explication as Enlightenment*. Cambridge: Cambridge University Press.

Cassirer, E. 1907. Kant und die moderne Mathematik. *Kant-Studien, 12*, 1–49.

Coffa, A. 1991. *The Semantic Tradition from Kant to Carnap: to the Vienna Station*. Cambridge: Cambridge University Press.

Dawson, J. 1984. The Reception of Gödel's Incompleteness Theorems. *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, 253–271.

Dubislav, W. 1932. *Die Philosophie der Mathematik in der Gegenwart*. Berlin: Junker & Dünnhaupt.

Frege, G. 1884. *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*. Hg. v. C. Thiel (1986). Hamburg: Meiner.

Frege, G. 1903. *Grundgesetze der Arithmetik, Vol. 2*. Jena: Pohle.

Frege, G. 1906. Über die Grundlagen der Geometrie. In: I. Angelelli (Hg.) 1990. *Gottlob Frege: Kleine Schriften* (2. Aufl.), S. 281–323. Hildesheim: Georg Olms Verlag.

Frege, G. 2004. *Frege's Lectures on Logic: Carnap's Student Notes, 1910–1914* (übersetzt u. hg. v. E. H. Reck & S. Awodey). Chicago: Open Court.

Frey, A. 2011. Logicism and Carnap's *Logical Syntax*. *Grazer Philosophische Studien, 83,* 143–169.

Frey, A. 2012. Die Verteidigung des Logizismus: Carnaps Versuch von 1930. *Logical Analysis and History of Philosophy/ Philosophiegeschichte und logische Analyse, 15,* 417-438.

Friedman, M. 1987. Carnap's *Aufbau* Reconsidered. *Noûs, 21*, 521–545.

Friedman, M. 1988. Logical Truth and Analyticity in Carnap's *Logical Syntax of Language*. In: W. Aspray & P. Kitcher (Hg.). *History and Philosophy of Modern Mathematics*, S. 82 – 94. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Friedman, M. 1992. Epistemology in the *Aufbau*. *Synthese, 93*, 15–57.

Friedman, M. 1997. Carnap and Wittgenstein's *Tractatus*. In: W. Tait (Hg.). *Early Analytic Philosophy: Frege, Russell, Wittgenstein*, S. 19–36. Chicago: Open Court.

Friedman, M. 1999. *Reconsidering Logical Positivism*. Cambridge: Cambridge University Press.

Friedman, M. 2000. *A Parting of the Ways: Carnap, Cassirer, Heidegger*. Chicago: Open Court.

Friedman, M. 2001. Tolerance and Analyticity in Carnap's Philosophy of Mathematics. In: J. Floyd & S. Shieh (Hg.). *Future Pasts: the Analytic Tradition in Twentieth-Century Philosophy*, S. 223–255. Oxford: Oxford University Press.

Friedman, M. 2004. Carnap and the Evolution of the A Priori. In: Awodey & Klein (2004), S. 101–116.

Friedman, M. & Creath, R. (Hg.) 2007. *The Cambridge Companion to Carnap*. Cambridge: Cambridge University Press.

Gálvez, J. P. 1997. Rudolf Carnap contra Kurt Gödel: die Kritik Carnaps von 1931 am Projekt Gödels. In: F. Stadler (Hg.). *Bausteine wissenschaftlicher Weltauffassung: Lecture Series/Vorträge 1992–1995*, S. 125–139. Wien: Springer.

Giere, R. & Richardson, A. (Hg.) 1996. *Origins of Logical Empiricism*. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Glock, H. 2008. *What is Analytic Philosophy?* Cambridge: Cambridge University Press.

Gödel, K. 1930. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik, 37*, 349–360.

Gödel, K. 1931. Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik, 38*, 173–198.

Gödel, K. 1995. Is Mathematics Syntax of Language? (Versionen III und V). In: *Collected Works, Vol. 3: Unpublished Essays and Lectures* (hg. v. S. Feferman et al.), S. 334–362. Oxford: Oxford University Press

Gödel, K. 2003. *Collected Works, Vol. 4: Correspondence A-G* (hg. v. S. Feferman et al.). Oxford: Oxford University Press.

Goldfarb, W. 1979. Logic in the Twenties: the Nature of the Quantifier. *The Journal of Symbolic Logic, 44*, 351–368.

Goldfarb, W. 1989. Russell's Reasons for Ramification. In: C. Savage & C. Anderson (Hg.). *Rereading Russell: Essays in Bertrand Russell's Metaphysics and Epistemology*, S. 24–40. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Goldfarb, W. 1996. The Philosophy of Mathematics in Early Positivism. In: Giere & Richardson (1996), S. 213–230.

Goldfarb, W. 2003. Introductory Note. In: Gödel (2003), S. 335–341.

Goldfarb, W. 2005. On Gödel's Way in: the Influence of Rudolf Carnap. *The Bulletin of Symbolic Logic, 11*, 185–193.

Goldfarb, W. 2009. Carnap's Syntax Program and the Philosophy of Mathematics. In: Wagner (2009), S. 109–120.

Goldfarb, W. 2010. Frege's Conception of Logic. In: Potter & Ricketts (2010), S. 63–85.

Goldfarb, W. & Ricketts, T. 1992. Carnap and the Philosophy of Mathematics. In: D. Bell & W. Vossenkuhl (Hg.). *Wissenschaft und Subjektivität: der Wiener Kreis und die Philosophie des 20. Jahrhunderts*, S. 61–78. Berlin: Akademie.

Hahn, H. et al. 1931. Diskussion zur Grundlegung der Mathematik. *Erkenntnis, 2,* 135–149.

Haller, R. 1993. *Neopositivismus: eine historische Einführung in die Philosophie des Wiener Kreises*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Heijenoort, J. 1967. Logic as Calculus and Logic as Language. *Synthese, 17*, 324–330.

Hilbert, D. 1925. On the Infinite (übersetzt von S. Bauer-Mengelberg). In: J. Heijenoort (Hg.) 1967. *From Frege to Gödel: a Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931* (3. Aufl.), S. 367–392. Cambridge: Harvard University Press.

Hilbert, D. 1931. Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre. *Mathematische Annalen, 104*, 485–494.

Hochberg, H. 1987. Russell, Ramsey, and Wittgenstein on Ramification and Quantification. *Erkenntnis, 27*, S. 257–281.

Hymers, M. 2005. Going around the Vienna Circle: Wittgenstein and Verification. *Philosophical Investigations, 28*, 205–234.

Köhler, E. et. al. 2002. *Kurt Gödel: Wahrheit und Beweisbarkeit, Bd. 1: Dokumente und historische Analysen*. Wien: Öbv & Hpt.

Kuhn, T. 1962. *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.

Mancosu, P. 1999. Between Vienna and Berlin: the Immediate Reception of Gödel's Incompleteness Theorems. *History and Philosophy of Logic, 20*, 33–45.

Marion, M. 1998. *Wittgenstein, Finitism, and the Foundations of Mathematics*. Oxford: Clarendon Press.

Mellor, D. (Hg.) 1990. *Philosophical Papers: F. P. Ramsey*. Cambridge: Cambridge University Press.

Menger, K. 1980. Introduction. In: B. McGuiness (Hg.). *Hans Hahn: Empiricism, Logic, and Mathematics. Philosophical Papers*, S. IX–XVIII. Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Mormann, T. 2000. *Rudolf Carnap*. München: C. H. Beck.

Natorp, P. 1910. *Logik (Grundlagen und logischer Aufbau der Mathematik und mathematischen Naturwissenschaft) in Leitsätzen zu akademischen Vorlesungen* (2. neubearbeitete Aufl.). Marburg: Elwert.

Neumann, J. v. 1931. Die formalistische Grundlegung der Mathematik. *Erkenntnis, 2*, 116–121.

Oberdan, T. 1992. The Concept of Truth in Carnap's *Logical Syntax of Language*. *Synthese, 93*, 239–260.

Oberdan, T. 1993. The Synthesis of Logicism and Formalism in Carnap's *Logical Syntax of Language*. In: F. Stadler (Hg.). *Scientific Philosophy: Origins and Developments*, S. 157–168. Dordrecht: Kluwer.

Potter, M. & Ricketts, T. (Hg.) 2010. *The Cambridge Companion to Frege*. Cambridge: Cambridge University Press.

Proust, J. 1987. Formal Logic as Transcendental in Wittgenstein and Carnap (übersetzt v. J. Buroker). *Noûs, 21*, 501–520.

Putnam, H. 1975. The Thesis that Mathematics is Logic. In: *Philosophical Papers, Volume 1: Mathematics, Matter and Method*, S. 12–42. Cambridge: Cambridge University Press.

Quine, W. V. 1936. Truth by Convention. In: O. Lee (Hg.). *Philosophical Essays for Alfred North Whitehead*, S. 90–124. London: Longman.

Quine, W. V. 1948. On What There is. *The Review of Metaphysics, 5*, 21–38.

Quine, W. V. 1951. Two Dogmas of Empiricism. *The Philosophical Review, 60*, 20–43.

Quine, W. V. 1963. Carnap and Logical Truth. In: Schilpp (1963), S. 385–406.

Quine, W. V. 1969. *Set Theory and its Logic* (2. erweiterte Aufl.). Cambridge: Harvard University Press.

Quine, W. V. 1995 *From Stimulus to Science*. Cambridge: Cambridge University Press.

Ramsey, F. P. 1925. The Foundations of Mathematics. In: Mellor (1990), S. 152–212.

Ramsey, F. P. 1926. Mathematical Logic. In: Mellor (1990), S. 213 –232.

Read, S. 1997. Completeness and Categoricity: Frege, Gödel and Model Theory. *History and Philosophy of Logic, 18*, 79–93.

Reck, E. H. 2004. From Frege and Russell to Carnap: Logic and Logicism in the 1920s. In: Awodey & Klein (2004), S. 151–180.

Reck, E. H. & Awodey, S. 2004. Frege's Lectures on Logic and Their Influence. In: Frege (2004), S. 17–42.

Reisch, G. A. 1991. Did Kuhn Kill Logical Empiricism? *Philosophy of Science, 58*, 264 –277.

Richardson, A. W. 1994. The Limits of Tolerance: Carnap's Logico-Philosophical Project in *Logical Syntax of Language*. *Proceedings of the Aristotelian Society (Supplementary Volume), 68*, 67–82.

Richardson, A. W. 1998. *Carnap's Construction of the World: the Logical Aufbau and the Emergence of Logical Empiricism*. Cambridge: Cambridge University Press.

Ricketts, T. 1996a. Pictures, Logic, and the Limits of Sense in Wittgenstein's *Tractatus*. In: H. Sluga & D. Stern (Hg.). *The Cambridge Companion to Wittgenstein*, S. 59–99. Cambridge: Cambridge University Press.

Ricketts, T. 1996b. Carnap: From *Logical Syntax* to Semantics. In: Giere & Richardson (1996), S. 231–250.

Ricketts, T. 1997. Frege's 1906 Foray into Metalogic. *Philosophical Topics, 25*, 169–188.

Ricketts, T. 2004. Frege, Carnap, and Quine: Continuities and Discontinuities. In: Awodey & Klein (2004), S. 181–202.

Ricketts, T. 2007. Tolerance and Logicism: Logical Syntax and the Philosophy of Mathematics. In: Friedman & Creath (2007), S. 200–225.

Ricketts, T. 2010a. Concepts, Objects and the Context Principle. In: Potter & Ricketts (2010), S. 149–219.

Ricketts, T. 2010b. Quines Objection and Carnap's *Aufbau*. In: M. Domski & M. Dickson (Hg.). *Discourse on a New Methode: Reinvigorating the Marriage of History and Philosophy of Science*, S. 311–331. Chicago: Open Court.

Rodriguez-Consuegra, F. 1999. Russell, Gödel and Logicism. In: A. Irvine (Hg.). *Bertrand Russell: Critical Assessments of Leading Philosophers, Vol. II*, S. 320–329. London: Routledge.

Russell, B. 1908. Mathematical Logic as Based on the Theory of Types. *American Journal of Mathematics, 30*, 222–262.

Russell, B. 1919. *Introduction to Mathematical Philosophy*. London: Allen & Unwin.

Russell, B. 1937. *The Principles of Mathematics* (2. Aufl.). London: Allen & Unwin.

Sauer, W. 1989. On the Kantian Background of Neopositivism. *Topoi*, 8, 111–119.

Schilpp, P. A. (Hg.) 1963. *The Philosophy of Rudolf Carnap*. Chicago: Open Court.

Schlick, M. 1979. Preface to *Friedrich Waismann: Logik, Sprache, Philosophie*. In: H. Mulder & B. Velde-Schlick (Hg.). *Moritz Schlick: Philosophical Papers, Vol II (1925–1936)*. Dordrecht: Reidel.

Stadler, F. 1997. *Studien zum Wiener Kreis: Ursprung, Entwicklung und Wirkung des Logischen Empirismus im Kontext*. Franfurt a. M.: Suhrkamp.

Tarski, A. 1992. Drei Briefe an Otto Neurath (hg. v. R. Haller, übersetzt v. J. Tarski). *Grazer Philosophische Studien, 43*, 1–32.

Uebel, T. 1992. *Overcoming Logical Positivism from Within: the Emergence of Neurath's Naturalism in the Vienna Circle's Protocol Sentence Debate*. Amsterdam: Rodopi.

Uebel, T. 2005. Learning Logical Tolerance: Hans Hahn on the Foundations of Mathematics. *History and Philosophy of Logic, 26*, 175–209.

Wagner, P. (Hg.) 2009. *Carnap's Logical Syntax of Language*. Basingstoke: Palgrave Macmillan.

Wang, H. 1987. *Reflections on Kurt Gödel*. Cambridge: MIT Press.

Weiner, J. 2004. *Frege Explained: from Arithemtic to Analytic Philosophy*. Chicago: Open Court.

Whitehead, A. N. & Russell, B. 1925. *Principia Mathematica, Vol. 1* (2. Aufl.). Cambridge: Cambridge University Press.

Whitehead, A. N. & Russell, B. 1927. *Principia Mathematica, Vol. 2* (2. Aufl.). Cambridge: Cambridge University Press.

Wittgenstein, L. 1921. *Logisch-philosophische Abhandlung/ Tractatus logico-philosophicus*. Hg v. B. McGuinness & J. Schulte (1989). Frankfurt a. M.: Suhrkamp.

Wittgenstein, L. 1974. *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik* (hg. v. G. Anscombe, R. Rhees & G. v. Wright). Frankfurt a. M.: Suhrkamp.